Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

a) Gegeben sei ein kreisförmiger Draht mit der Dichtefunktion $\rho(x, y) = (x + 4)(y + 3)$. Die Form des Drahtes werde beschrieben durch die Kurve

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \quad \text{mit } 0 \le t \le 2\pi \; .$$

Man zeichne die Form des Drahtes und berechne die Gesamtmasse des Drahtes.

b) Für das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -z^2/2 \\ 0 \\ xz \end{pmatrix}$

berechne man das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$ mit der Kurve

$$\mathbf{c} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos^2 t \\ 2\sin t\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} \; .$$

Aufgabe 22:

Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(\sin y + 3x^2z^2, x\cos y + \frac{1}{1+y^2}, 1 + 2x^3z\right)^T \; .$$

a) Man weise die Existenz eines Potentials zu $\boldsymbol{f}$ nach, ohne es zu berechnen.

b) Man berechne ein Potential durch sukzessives Integrieren von $\boldsymbol{f}$ und

c) mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

d) Gegeben sei die Kurve $\mathbf{c} : [0, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 0, \sin t)^T$. Man berechne das Kurvenintegral

$$\int_c \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \; .$$

e) Man zeichne die Kurve $\mathbf{c}$ unter Verwendung der MATLAB-Routine 'plot3'.

Aufgabe 23:

a) Für die Funktion

$$f : Q \to \mathbb{R}\,, \quad f(x,y) = 6 - 2x + 4y$$

mit $Q := [0,3] \times [0,2]$ berechne man

(i) Riemannsche Unter- und Obersumme zu folgender äquidistanter Zerlegung Z_n von Q

$$Q_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]\,, \quad i,j = 1,\ldots,n$$

wobei $x_i = \dfrac{3i}{n}$ und $y_j = \dfrac{2j}{n}$ gelte

(ii) und das Flächenintegral von f über Q.

b) Man berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^2 (2x+y)^2 \, dy \, dx\,,$

(ii) $\displaystyle\int_R \frac{1}{xy^2 + x} \, d(x,y) \quad \text{mit} \quad R = [1,2] \times [0,1]\,,$

Aufgabe 24:

a) (i) Man zeichne den durch die Funktionen $f(x) = 2x$ und $g(x) = 24 - 2x^2$ eingeschlossenen Bereich P und stelle ihn als Normalbereich dar.

(ii) Man berechne $\displaystyle\int_P x \, d(x,y)$

b) Man verifiziere den Satz von Green für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x,y) = (x^2 + y, \sin x)^T$$

und das Gebiet G, das von der Funktion $y = 1 - (x-1)^2$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

Abgabetermin: 15.1. - 19.1.2018 (zu Beginn der Übung)