Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2017/18**
Prof. Dr. J. Behrens
Dr. K. Rothe

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 7

Aufgabe 25:

a) Man berechne den von der Kurve $\mathbf{c}$ mit

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad -1 \le t \le 1$$

überstrichenen Flächeninhalt und zeichne die Kurve.

b) Durch $r(\varphi) = \sqrt{2 + 5\sin\varphi\cos^2\varphi}$ ist eine Kurve in Polarkoordinaten gegeben. Man berechne die von der Kurve überstrichene Fläche für $\varphi \in [0, 2\pi]$ und zeichne die Kurve.

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Sattelfläche

$$S = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4\,,\ z = xy\right\}\ .$$

a) Man gebe eine Parametrisierung von S an,

b) zeichne S mit Hilfe der MATLAB-Routine 'ezgraph3' und

c) berechne den Flächeninhalt von S mit Hilfe eines Oberflächenintegrals.

Aufgabe 27:

Gegeben seien das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(x, y, z) = (x^3, 2xz, xy)^T$ einer turbulenten Strömung sowie die Fläche

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \quad x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad z = x^2 + y^2 \right\} .$$

a) Man zeichne die Fläche F .

b) Man berechne auf F das Integral über alle Wirbelstärken $\int\limits_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, do$.

c) Man berechne die Zirkulation $\oint\limits_{\partial F} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{v}$ längs der Randkurve ∂F von F und bestätige damit den Integralsatz von Stokes im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 28:

a) Man zeichne den durch $1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq y$ und $x^2 + y^2 \leq 9$ gegebenen halben Zylinder Z und berechne seine Masse mit der Dichtefunktion $\rho(x, y, z) = z$ unter Verwendung von Zylinderkoordinaten.

b) Gegeben seien das Vektorfeld $\boldsymbol{f}(x, y, z) = \left(0, 0, z^3\right)^T$ und der Körper

$$H = \left\{ (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \,,\ 0 \leq y \right\} .$$

(i) Man skizziere H .

(ii) Für die H berandenden Flächenstücke gebe man jeweils Parametrisierungen an.

(iii) Man berechne jeweils den Fluss von $\boldsymbol{f}$ durch diese Randflächenstücke.

(iv) Man berechne das Volumenintegral $\int_H \operatorname{div} \boldsymbol{f}(x, y, z)\, d(x, y, z)$.

Abgabetermin: 29.1. - 2.2.2018 (zu Beginn der Übung)