

Analysis III

Winter 2017/2018



Punkt Mengen, Abbildungen, Kurven im \mathbb{R}^n

Buch Kapitel 5.1-5.4

Ihr Professor

Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CIISAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 11:15-12:00
Gebäude E, Raum 3.079
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

Hintergrund

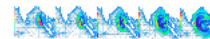


Kurz-CV

seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung



Multi-Skalen Simulationen



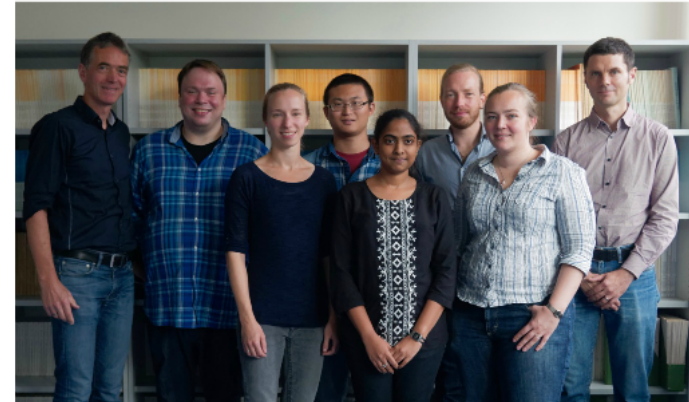
Koordinaten:



Prof. Dr. Jörn Behrens
Uni Hamburg/ CliSAP
Grindelberg 5, Room 411 (4rd floor)
Bundesstraße 55, Room 120 (1st floor)
Tel. (040) 42838 7734
mail joern.behrens@uni-hamburg.de

Sprechstunde in Harburg: Do 11:15-12:00
Gebäude E, Raum 3.079
(bitte vorher Termin per E-Mail vereinbaren)

Hintergrund

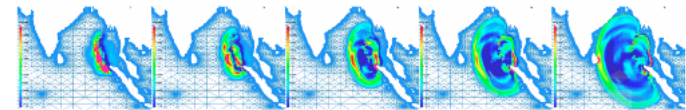


Kurz-CV

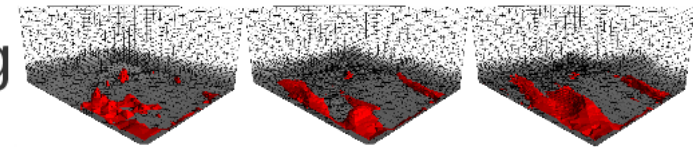
seit 2009 Prof. @ Uni Hamburg, KlimaCampus/Dept. Mathematik
2006-2009 Leitung Tsunami Gruppe @ AWI, Dozent @ Uni Bremen
2005 Habilitation (Mathematik) @ TUM
2003-2004 Visiting Scientist @ NCAR, Boulder, CO, USA
1998-2006 Wiss. Assistent + Akad. Rat @ TUM, Wiss. Rechnen
1996-1998 Post-Doc @ AWI
1991-1996 Dr. rer. nat. (Mathematik) @ AWI/Uni Bremen
1991 Diplom Mathematik @ Uni Bonn

Forschungsinteressen

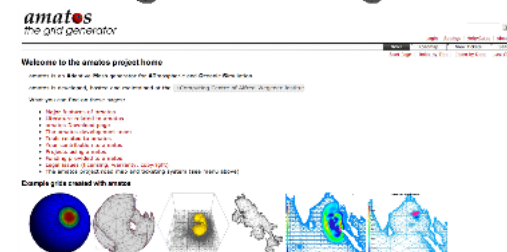
Adaptive Tsunami Modellierung



Adaptive Atmosphären Modellierung



Gitter Erzeugung



Multi-Skalen Simulationen

Infos zum Kurs

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K. Vettters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/uhh/cm/a3/1718/1m.html>

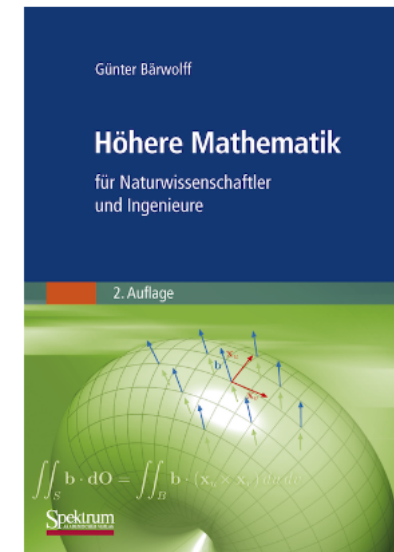
Bitte gründlich vorbereiten!

Literatur

Beispiele!

G. Bärwolff: *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure* (2. Aufl.), Springer, Berlin/Heidelberg, 2009.

R. Ansorge et al.: *Mathematik für Ingenieure I* (4. Aufl.), Wiley-VCH, Berlin, 2010.



Formelsammlung

K.Vetters: *Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kai Rothe

<https://www.math.uni-hamburg.de/home/rothe/>



Materialien:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/a3/1718/lm.html>

Bitte gründlich vorbereiten!

Punktmenge im \mathbb{R}^n

Idee:

Betrag $|x|$ und Abstand $|x - y|$ lassen sich von offenen Intervallen auf offene Mengen im \mathbb{R}^n übertragen.

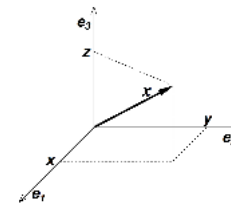
Vereinbarung:

Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ in der Koordinatenform dar:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

e_i die Einheitsspaltenvektoren.

Beispiel: \mathbb{R}^3



Beobachtung:

Wir übertragen einfach alle Definitionen aus \mathbb{R} , die auf Intervallen basierten, auf den \mathbb{R}^n , basierend auf Kugelumgebungen.

Definition (Betrag und Abstand im \mathbb{R}^n):

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, dann definiere

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

den Betrag oder die Länge von x .

Der Abstand d zweier Elemente $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d := |x - y|.$$

Bemerkung:

- d ist Betrag des Differenzvektors $x - y$.
- d ist der **Euklidische Abstand** und markiert die kürzeste Linie zwischen x und y ($n \leq 3$).

Definition (Offene Menge, innerer Punkt im \mathbb{R}^n):

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn zu jedem Element $x \in M$ eine Umgebung $K_{x,r}$ gefunden werden kann, so dass $K_{x,r} \subseteq M$.

Ein Punkt $x \in M$ heißt **innerer Punkt** der Menge M , wenn $K_{x,r}$ existiert, so dass $K_{x,r} \subseteq M$ ganz in M liegt.

Notizen: Es bezeichnen M die Menge aller inneren Punkte von M .

Bemerkung:

- x innerer Punkt von $M \Rightarrow x \in M$.
- M offene Menge $\Rightarrow \hat{M} = M$.

Definition (Umgebungen im \mathbb{R}^n):

Die **offene Kugelumgebung** des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r ist

$$K_{x_0,r} := \{x : |x - x_0| < r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist die **abgeschlossene Kugelumgebung**

$$\bar{K}_{x_0,r} := \{x : |x - x_0| \leq r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Idee:

Betrag $|x|$ und Abstand $|x - y|$ lassen sich von offenen Intervallen auf offene Mengen im \mathbb{R}^n übertragen.

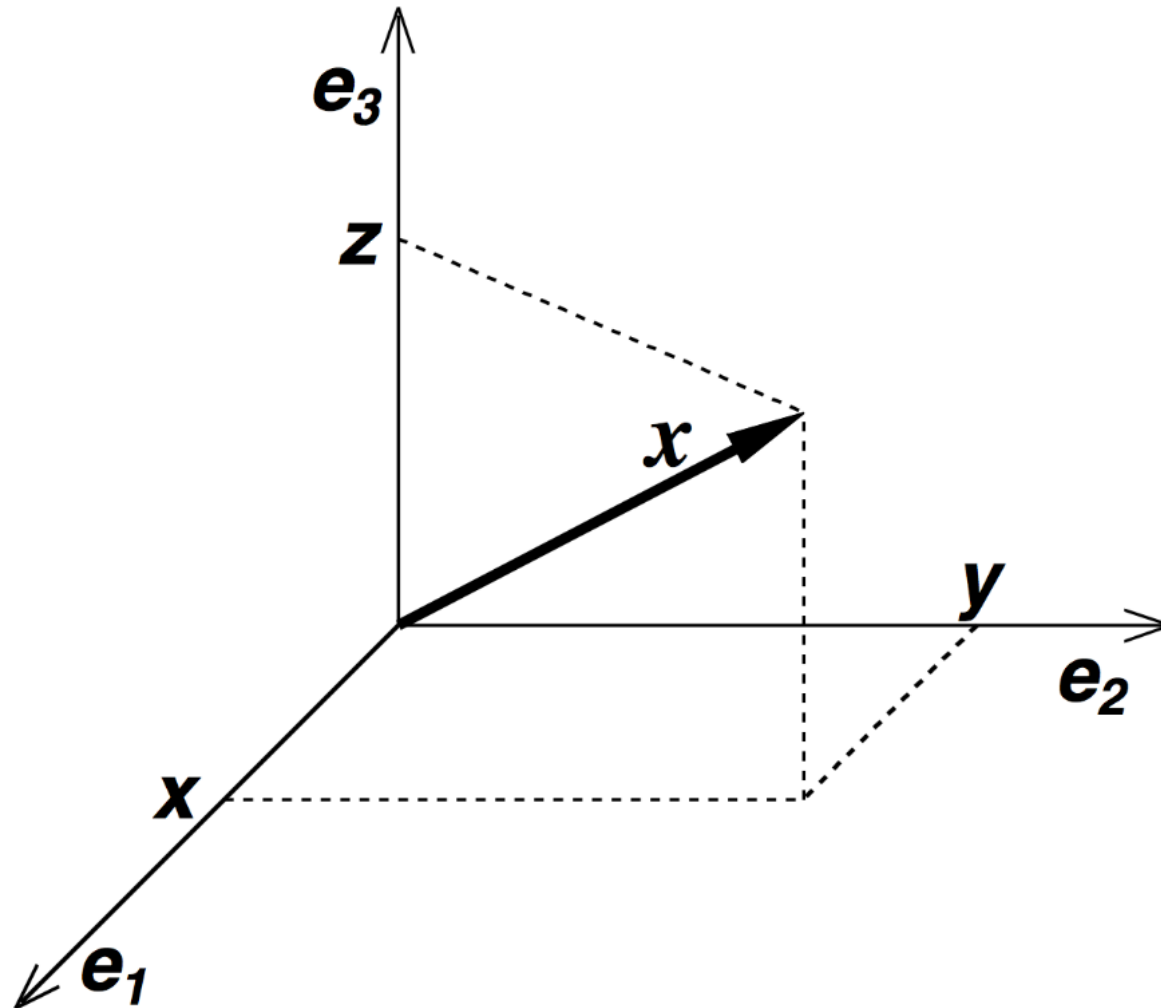
Vereinbarung:

Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ in der *Koordinatenform* dar:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n,$$

\mathbf{e}_i die Einheitsspaltenvektoren.

Beispiel: \mathbb{R}^3



Definition (Betrag und Abstand im \mathbb{R}^n):

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, dann definiere

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

den **Betrag** oder die **Länge** von \mathbf{x} .

Der **Abstand** d zweier Elemente $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sei

$$d := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Bemerkung:

- d ist Betrag des Differenzvektors $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.
- d ist der **Euklidische Abstand** und markiert die kürzeste Linie zwischen \mathbf{x} und \mathbf{y} ($n \leq 3$).

Definition (Umgebungen im \mathbb{R}^n):

Die **offene Kugelumgebung** des Punktes $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mit Radius r ist

$$K_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$

Entsprechend ist die **abgeschlossene Kugelumgebung**

$$\bar{K}_{\mathbf{x}_0, r} := \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq r; \quad 0 < r \in \mathbb{R}\}.$$



Definition (Offene Menge, innerer Punkt im \mathbb{R}^n):

Eine Menge $M \in \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, wenn zu jedem Element $\mathbf{x} \in M$ eine Umgebung $K_{\mathbf{x},r}$ gefunden werden kann, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$.

Ein Punkt $\mathbf{x} \in M$ heißt **innerer Punkt** der Menge M , wenn $K_{\mathbf{x},r}$ existiert, so dass $K_{\mathbf{x},r} \subset M$ ganz in M liegt.

Notation: Es bezeichne \dot{M} die Menge aller inneren Punkte von M .

Bemerkung:

- \mathbf{x} innerer Punkt von $M \Rightarrow \mathbf{x} \in M$.
- M offene Menge $\Rightarrow \dot{M} = M$.

Beobachtung:

Wir übertragen einfach alle Definitionen aus \mathbb{R} ,
die auf Intervallen basierten,
auf den \mathbb{R}^n , basierend auf Kugelumgebungen.

Weitere Definitionen

Definition (Häufungspunkt im \mathbb{R}^n):
 Ein Punkt $a_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung K_{ϵ, a_0} mit $\epsilon > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt.
 $M \cap K_{\epsilon, a_0} \neq \emptyset$ für alle $\epsilon > 0$.

Definition (Randpunkt im \mathbb{R}^n):
 Ein Punkt x_0 heißt **Randpunkt** von $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung K_{ϵ, x_0} sowohl
 • ein Punkt x der Menge M ($x \in M$), als auch
 • ein Punkt aus $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \notin M$.
 Bezeichne mit ∂M die Menge der Randpunkte von M .

Satz (Grenzwert der Koordinatenfolgen):
 Der Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert a_0 der Folge (a_k) gilt dann:

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{1k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} \end{pmatrix}$$

Definition (Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n):
 Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge, $a_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) von (a_k) , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_k - a_0| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

Schreibe:

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k \quad \text{oder} \quad a_k \rightarrow a_0 (k \rightarrow \infty).$$

1

Definition (Folge im \mathbb{K}^n):
 Sei $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $a_k \in \mathbb{K}^n$ zuordnet. Die Wertemenge dieser Abbildung nennt man **Folge** im \mathbb{K}^n .
 Schreibe:
 $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ oder kurz (a_k) .

Definition (Abgeschlossene Menge im \mathbb{R}^n):
 $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bemerkung:
 Äquivalent dazu: M ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Definition (Beschränkte und kompakte Menge im \mathbb{R}^n):
 $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn $0 < C < \infty$ existiert, so dass
 $|x| \leq C$ für alle $x \in M$.
 M heißt **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition (Zusammenhängende und konvexe Menge in \mathbb{R}^n , Gebiet):

Vorbereitungen:

- **Verbindungsstrecke:** $[x, y]$, $x, y \in M$, ist gegeben durch
 $[x, y] := \{z : z = x + \lambda(y - x), \lambda \in [0, 1]\}$.
- **Polygonzug:** $(x_0, \dots, x_n) = \bigcup_{i=0}^{n-1} [x_i, x_{i+1}]$ verbindet $x_0, \dots, x_n \in M$ jeweils durch Strecken.

Definition:

- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn zwei beliebige Punkte $x, y \in M$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, so dass $[x_0, \dots, x_n] \subset M$.
- M heißt **konvex**, falls für beliebige $x, y \in M$ die Strecke $[x, y] \subset M$.
- Ist M offen und zusammenhängend, so heißt M **Gebiet**.

Definition (Häufungspunkt im \mathbb{R}^n):

Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Häufungspunkt** der Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0, r}$ mit $r > 0$ beliebig, ein Punkt der Menge M liegt.

Also

$$M \cap K_{\mathbf{x}_0, r} \neq \emptyset \text{ für alle } r > 0.$$

Definition (Randpunkt im \mathbb{R}^n):

Ein Punkt \mathbf{x}_0 heißt **Randpunkt** von $M \subset \mathbb{R}^n$, wenn in jeder Umgebung $K_{\mathbf{x}_0, r}$ sowohl

- ein Punkt \mathbf{x} der Menge M ($\mathbf{x} \in M$), als auch
- ein Punkt aus $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{y} \notin M$.

Bezeichne mit ∂M die Menge der Randpunkte von M .

Definition (Abgeschlossene Menge im \mathbb{R}^n):

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält.

Bemerkung:

Äquivalent dazu: M ist abgeschlossen, wenn sie alle ihre Häufungspunkte enthält.

Definition (Beschränkte und kompakte Menge im \mathbb{R}^n):

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **beschränkt**, wenn $0 < C \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{x}| \leq C, \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

M heißt **kompakt**, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Definition (Zusammenhängende und konvexe Menge im \mathbb{R}^n , Gebiet)

Vorüberlegungen:

- **Verbindungsstrecke:** $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$, ist gegeben durch

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}), s \in [0, 1]\}.$$

- **Polygonzug:** $[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] = \bigcup_{j=1}^p [\mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j]$ verbindet $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p \in M$ jeweils durch Strecken.

Definition:

- $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **zusammenhängend**, wenn zwei beliebige Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ durch einen Polygonzug verbunden werden können, so dass $[\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_p] \subset M$.
- M heißt **konvex**, falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ die Strecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}] \subset M$.
- Ist M offen und zusammenhängend, so heißt M **Gebiet**.

Definition (Folge im \mathbb{R}^n):

Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl k genau ein Element $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ zuordnet. Den Wertebereich dieser Abbildung nennt man **Folge** im \mathbb{R}^n .

Schreibe:

$$(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}} \quad \text{oder kurz} \quad (\mathbf{a}_k).$$



Definition (Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n):

Sei $(\mathbf{a}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge. $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt **Grenzwert** (oder **Limes**) von (\mathbf{a}_k) , wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0.$$

Schreibe:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k \quad \text{oder } \mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}_0 (k \rightarrow \infty).$$

1

Satz (Grenzwert der Koordinatenfolgen):

Der Grenzwert einer Folge im \mathbb{R}^n existiert genau dann, wenn die Grenzwerte der Koordinatenfolgen existieren. Für den Grenzwert \mathbf{a}_0 der Folge (\mathbf{a}_k) gilt dann:

$$\mathbf{a}_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \begin{pmatrix} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{1k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ \vdots \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Abbildungen und Funktionen

Definition (Abbildungen im \mathbb{R}^n):

Eine **Abbildung**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ist eine Vorschrift, die jedem $x \in D$ genau ein Element $y \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.
Schreibe: $y = f(x)$.

- D heißt **Definitionsbereich** der Abbildung f .
- Der **Wertebereich** W von f ist gegeben durch

$$W = f(D) := \{y \in \mathbb{R}^m : \exists x \in D \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Notationen

- Schreibe **vektorstwertige** Abbildungen ($m > 1$) fett (z.B. f).
- Schreibe **realwertige** Abbildungen ($m = 1$) normal.

Spezialfälle

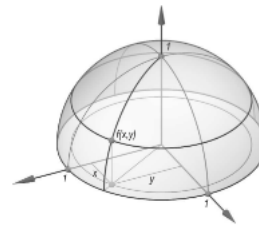
- $m = 1$: f heißt **Skalarfeld** oder Funktion.
- $m > 1$: f heißt **Vektorfeld**
- $n = 1$: mit zusätzlichen Eigenschaften heißt f auch **Kurve**.

Abbildungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. f ordnet jedem Punkt in D (x - y -Ebene) einen Wert z zu. Der **Graph** von f

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y)^T \in D\}$$

ergibt eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y)^T : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Definition (Abbildungen im \mathbb{R}^n):

Eine **Abbildung**

$$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

ist eine Vorschrift, die jedem $\mathbf{x} \in D$ genau ein Element $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ zuordnet.
Schreibe: $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

- D heißt **Definitionsbereich** der Abbildung \mathbf{f} .
- Der **Wertebereich** W von \mathbf{f} ist gegeben durch

$$W = \mathbf{f}(D) := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : \exists \mathbf{x} \in D \text{ mit } \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}.$$

Notationen

- Schreibe **vektorwertige** Abbildungen ($m > 1$) fett (z.B. \mathbf{f}),
- Schreibe **realwertige** Abbildungen ($m = 1$) normal.

Spezialfälle

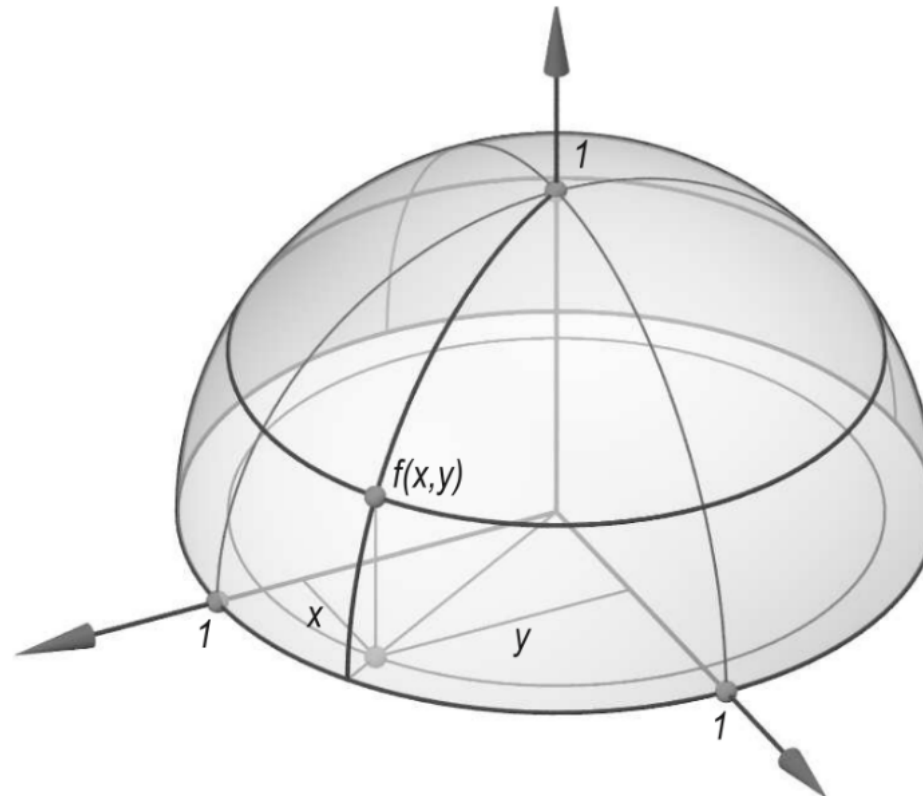
- $m = 1$: f heißt **Skalarfeld** oder Funktion.
- $m > 1$: \mathbf{f} heißt **Vektorfeld**
- $n = 1$: mit zusätzlichen Eigenschaften heißt \mathbf{f} auch **Kurve**.

Abbildungen im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, d.h. f ordnet jedem Punkt in D ($x - y$ -Ebene) einen Wert z zu. Der **Graph** von f

$$g(f) := \{(x, y, f(x, y)) : (x, y)^\top \in D\}$$

ergibt eine Fläche im \mathbb{R}^3 .

Beispiel: $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y)^\top : x^2 + y^2 \leq 1\}$



Kurven im \mathbb{R}^n

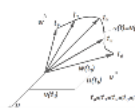
Vorbemerkung

- Kurven im \mathbb{R}^2 wurden bereits im ersten Semester eingeführt, hier verallgemeinern wir!
- Betrachte $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, also $D = I$ Intervall.
- Notation: verwende $\gamma: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ griechische Buchstaben für Abbildungen.
- $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat als Bild einen Vektor im \mathbb{R}^n , schreibe

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_n(t) \end{pmatrix}, t \in I.$$

Beispiel (2) reparametrisieren

- Diskretisierung einer Kreislinie (Drehung) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$
- Diskretisierung einer Kreislinie (Drehung) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$
- Eine Asymptotische Drehung (Drehung) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$



Definition (Stetigkeit, Differenzierbarkeit): Die Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stetig, bzw. differenzierbar, wenn ihre Koordinatenfunktionen $\gamma_j(t), j=1, \dots, n$, stetig, bzw. differenzierbar sind.

Definition (Kurve, Kurvenstück im \mathbb{R}^n):

- Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurvenstück**.
- Die reellen Zahlen $t \in I = [a, b]$ nennt man **Kurvenparameter**.
- Eine **Kurve** γ ist eine unendliche Anzahl Kurvenstücke $\gamma_j: I_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($I_j = [a_j, b_j]$) die in einem Endpunkt von I_j mit dem Anfangspunkt von I_{j+1} übereinstimmen.

$$\gamma_j(b_j) = \gamma_{j+1}(a_{j+1}), j=1, \dots, k-1.$$
- Schreibe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$.
- Wir bezeichnen mit $\gamma(a_j, b_j) \rightarrow \mathbb{R}^n$ als **stückweise glatte Kurve**.

Definition (reguläre Kurve im \mathbb{R}^n): Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ .

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}$$

• heißt **reguläre Kurve** falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0, \forall t \in [a, b].$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Definition (Tangentenvektor):

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dreimal stetig diff'bare Kurve. Dann heißt

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

Tangentenvektor für den Parameterwert $t \in [a, b]$.

- $T(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ (Skalarprodukt = 0)
- $T(t)$ ist ein Einheitsvektor
- $T(t)$ ist ein Vektor, der die Richtung der Kurve anzeigt
- $T(t)$ ist ein Vektor, der die Richtung der Kurve anzeigt

Definition (Binormalenvektor): Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $B(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von T .

$$B(t) = \frac{\dot{T}(t)}{|\dot{T}(t)|}$$

• heißt **Binormalenvektor**.



Definition (Tangentenvektor):

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $T(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ .

$$T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

- Richtung für die Kurve tangential (Skalarprodukt = 0) ($T \perp \dot{\gamma}$)
- Die Länge $|T(t)| = 1$ (Einheitsvektor)
- Die Richtung $T(t)$ ist die Richtung der Kurve anzeigt

Definition (Bogenlänge):

Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[a, b]$ definiert als

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$$

Bemerkungen

- $s(a) = 0$ ($s(0) = 0$)
- $s(b) = \int_a^b |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau$ (Bogenlänge)

Ableitungen:

Bei $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulärer Kurve $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

- $\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\gamma}_n(t) \end{pmatrix}$
- $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \dot{\gamma}_2(t)^2 + \dots + \dot{\gamma}_n(t)^2}$
- $T(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$
- $B(t) = \frac{\dot{T}(t)}{|\dot{T}(t)|}$
- $\dot{\gamma}(t) \perp B(t)$ ($\dot{\gamma}(t) \cdot B(t) = 0$)
- $\dot{\gamma}(t) \perp \dot{\gamma}(t)$ ($\dot{\gamma}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = |\dot{\gamma}(t)|^2$)

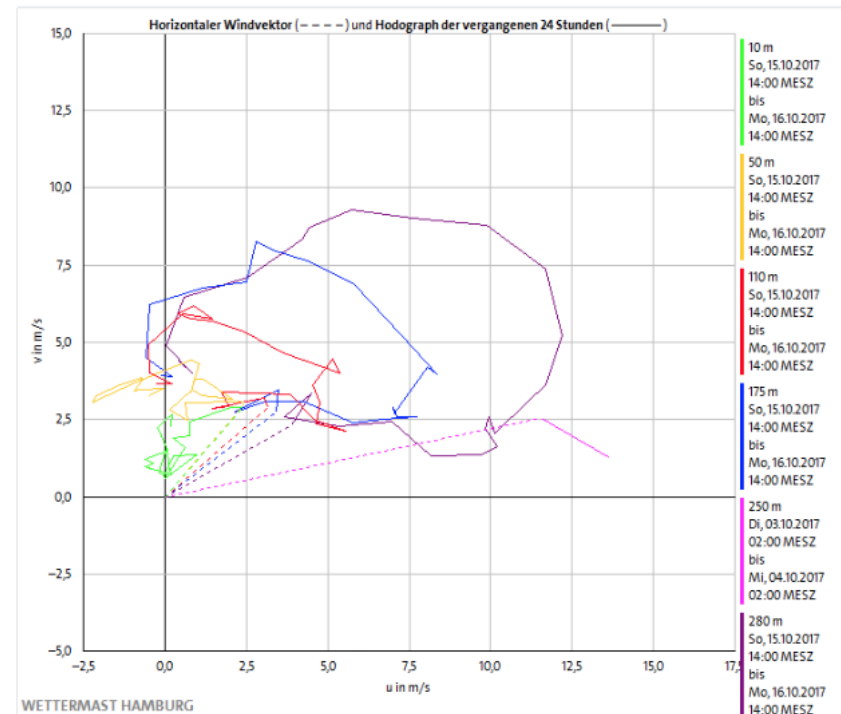
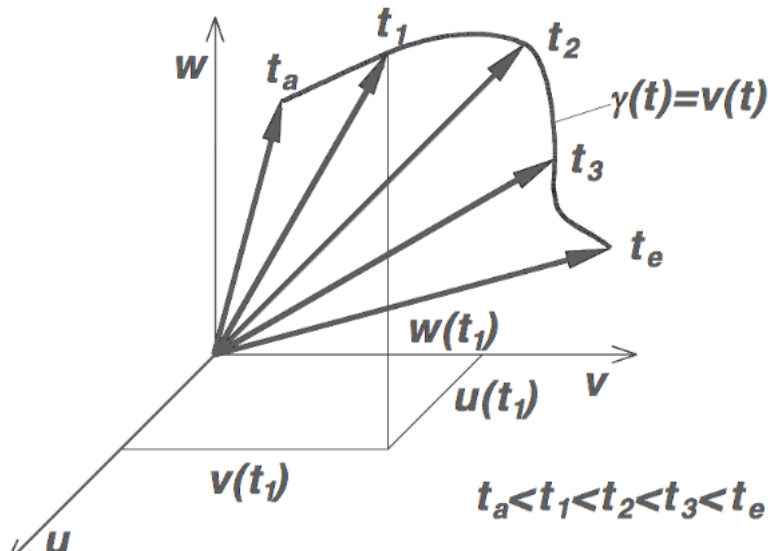
Vorbemerkung:

- Kurven im \mathbb{R}^2 wurden bereits im ersten Semester eingeführt, hier verallgemeinern wir!
- Betrachte $D \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen, also $D = I$ Intervall.
- Notation: verwende $\gamma : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ griechische Buchstaben für Abbildungen.
- $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat als Bild einen Vektor im \mathbb{R}^n , schreibe

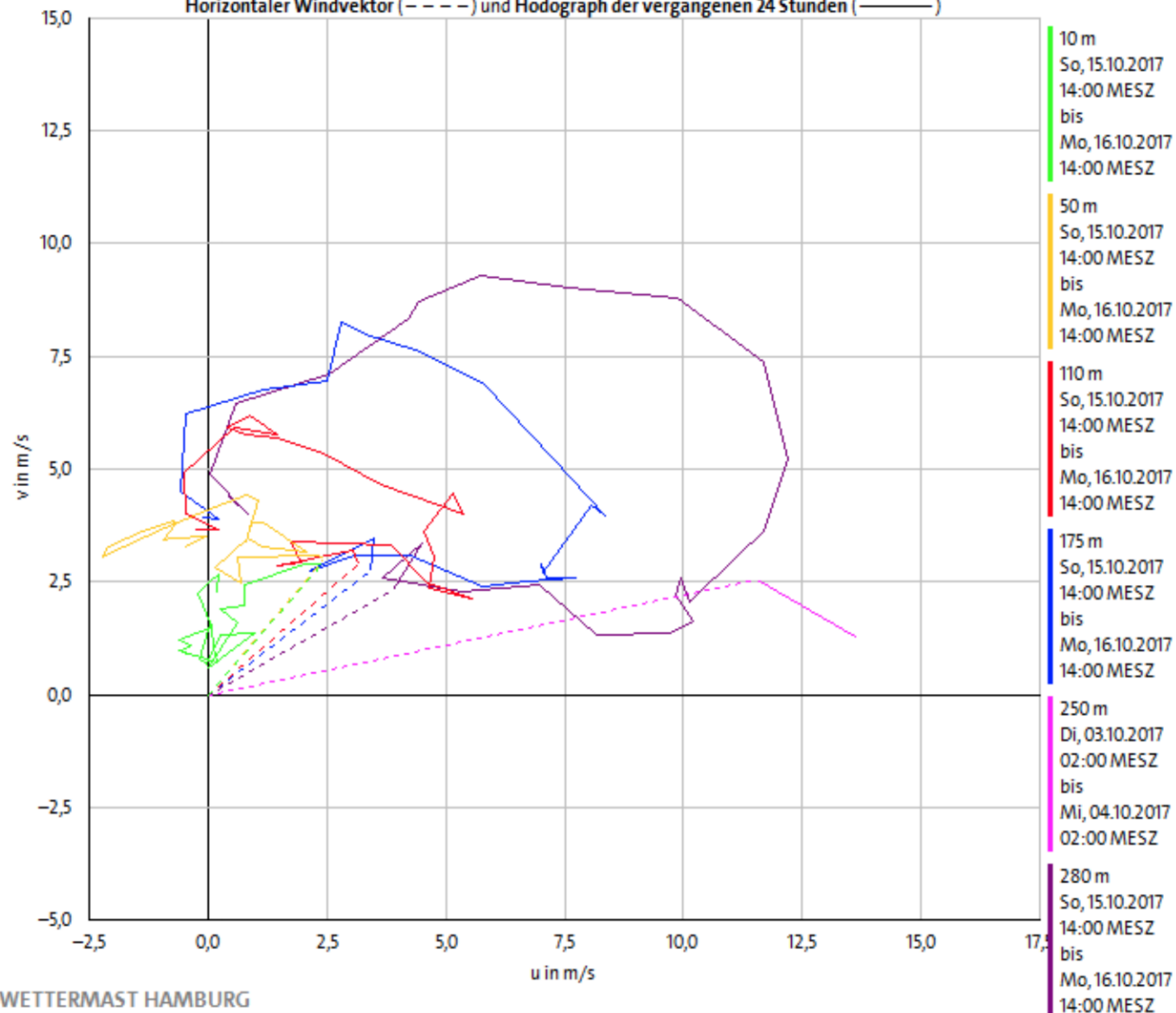
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, t \in I.$$

Beispiel (Windgeschwindigkeit):

- Windgeschwindigkeit in festem Punkt (Wettermast): $\gamma(t) = \mathbf{v}(t) = (u(t), v(t), w(t))^T$, mit u, v, w Geschwindigkeitskomponenten in x, y, z -Richtung.
- Für einen Zeitraum $t_a \leq t \leq t_e$ erhält man eine Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $I = \{t : t_a \leq t \leq t_e\}$.
- Unter Annahme gewisser Differenzierbarkeits-Eigenschaften beschreibt γ eine Kurve.



Horizontaler Windvektor (- - -) und Hodograph der vergangenen 24 Stunden (—)



Bemerkung (Stetigkeit, Differenzierbarkeit): Die Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heiße stetig, bzw. differenzierbar, wenn ihre Koeffizientenfunktionen $x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, stetig, bzw. differenzierbar sind.

Definition (Kurve, Kurvenstück im \mathbb{R}^n):

- Eine stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Kurvenstück**.
- Die reellen Zahlen $t \in I = [t_a, t_e]$ nennt man **Kurvenparameter**.
- Eine **Kurve** γ ist eine endliche Anzahl Kurvenstücke $\gamma_j : [t_{j-1}, t_j] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($j = 1, \dots, k$), die miteinander verbunden sind, also

$$\gamma_{j+1}(t_j) = \gamma_j(t_j), \quad j = 1, \dots, k - 1.$$

Schreibe $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k]$.

- Wir bezeichnen $\gamma : [t_0, t_k] \rightarrow \mathbb{R}^3$ als **stückweise glatte** Kurve.

Definition (reguläre Kurve im \mathbb{R}^n): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ :

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

γ heißt **reguläre Kurve**, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e].$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Ableitungsregeln:

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- **Linearität:**

$$\frac{d}{dt} (\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Skalarprodukt:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Vektorprodukt ($n = 3$):

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion $\alpha(t)$:

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t)\gamma_1(t)) = \dot{\alpha}(t)\gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

Definition (Bogenlänge):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

$$s(t) := \int_{t_a}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Bemerkungen:

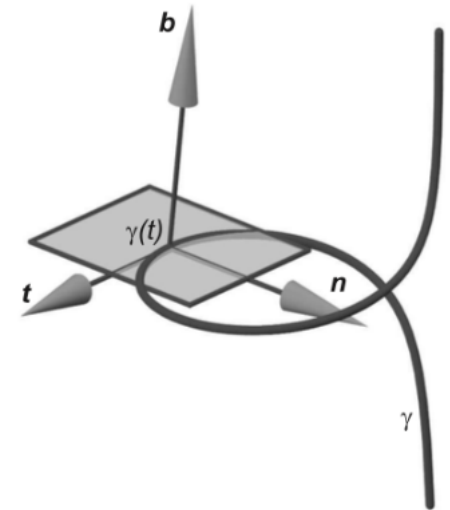
- Es gilt $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$.
- Bezeichne $ds := |\dot{\gamma}(t)|dt$ das (skalare) Bogenelement.

Definition (Tangentenvektor):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

Dann ist der **Tangentenvektor** für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$ gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$



Bemerkungen:

- Gleichung für die Kurventangente in $\gamma(t_0)$: $\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- Die Ebene $E : [\mathbf{x} - \gamma(t)] \cdot \mathbf{t}(t) = 0$ ist die Ebene, die $\gamma(t)$ enthält und $\mathbf{t}(t)$ als Normalenvektor hat.

Definition (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (beachte $n = 3!$) zweimal (komponentenweise) stetig diff'bar und gelte $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq 0$, dann definiert

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} \quad \text{den Hauptnormalenvektor,}$$

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{den Binormalenvektor und}$$

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{die Schmiegebene}$$

der Kurve γ für den Parameterwert t .

Bemerkungen

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonal (Einheitsvektoren).
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt **oggetztes Dreieck**.
- Die zu $\mathbf{n}(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt. Bsp für die Garolage einer Ellipse durch die Nachpunkte $\mathcal{P} = (-1, 2, 2), (0, 1, 2), (1, 2, 2)$ ($\epsilon > 0$).

- Die Ankergröße

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{1}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} \cdot \dot{\mathbf{t}}(t) = \dot{\mathbf{n}}(t)$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungswachstum der Kurve in $[t, t+\Delta t]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{n}}{dt} \cdot \frac{1}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}$$

heißt **Krümmungsvektor**.

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\mathbf{n}}(t)|}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} = \frac{|\ddot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|^2}$$

misst man **Krümmung** der Kurve an t .

2

Bemerkungen:

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt **begleitendes Dreibein**.
- Die zu $\gamma(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt: Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte $\gamma(t - \tau), \gamma(t), \gamma(t + \tau)$ ($\tau \rightarrow 0$).
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in $[t_1, t]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt **Krümmungsvektor**.

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

nennt man **Krümmung** der Kurve an t .

Definition (Torsionsvektor):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in]t_a, t_e[$.

Bemerkungen:

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{t}(t)$
- Es folgt: Es existiert eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t) \mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$ heißt **Torsion** der dreimal stetig diff'baren Kurve γ an $t \in]t_a, t_e[$.

Regeln:

Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- **Tangentenvektor:**

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

- **Binormalenvektor:**

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$

- **Hauptnormalenvektor:**

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- **Krümmung:**

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

- **Torsion:**

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

Weitere Definitionen

Definition 1.1 Sei X ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt** von $A \subseteq X$, falls jede Umgebung U von x sowohl Punkte aus A als auch Punkte aus $X \setminus A$ enthält. x heißt **Innenpunkt** von A , falls eine Umgebung U von x ganz in A liegt. x heißt **äußere Randpunkt** von A , falls jede Umgebung U von x Punkte aus $X \setminus A$ enthält, aber keine Punkte aus A .

Definition 1.2 Sei $A \subseteq X$. Die **Äußere Randmenge** $\partial^+ A$ ist die Menge aller äußeren Randpunkte von A . Die **Innenmenge** $\text{int} A$ ist die Menge aller Innenpunkte von A . Die **Randmenge** ∂A ist die Menge aller Randpunkte von A .

Definition 1.3 Sei $A \subseteq X$. A heißt **geschlossen**, falls $A = \overline{A}$. A heißt **offen**, falls $A = \text{int} A$. A heißt **halboffen**, falls $A = \text{int} A \cup \partial^+ A$.

Definition 1.4 Sei $A \subseteq X$. A heißt **kompakt**, falls A abgeschlossen und beschränkt ist.

Abbildungen und Funktionen

Definition 1.1 Sei X, Y zwei Mengen. Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist eine Zuordnung $x \mapsto f(x)$ von jedem Element $x \in X$ zu einem Element $f(x) \in Y$.

Definition 1.2 Sei $f: X \rightarrow Y$. f heißt **injektiv**, falls $f(x) = f(y) \implies x = y$. f heißt **surjektiv**, falls $\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition 1.3 Sei $f: X \rightarrow Y$. f heißt **Umkehrabbildung**, falls $f^{-1}(y) = \{x \in X: f(x) = y\}$ für alle $y \in Y$ existiert.

Definition 1.4 Sei $f: X \rightarrow Y$. f heißt **stetig**, falls $f^{-1}(U)$ offen in X ist für jede offene Menge U in Y .

Punktmenge im \mathbb{R}^n

Beispiel: \mathbb{R}^3

Definition 1.1 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$. A heißt **offen**, falls $A = \text{int} A$. A heißt **geschlossen**, falls $A = \overline{A}$. A heißt **halboffen**, falls $A = \text{int} A \cup \partial^+ A$.

Definition 1.2 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$. A heißt **kompakt**, falls A abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition 1.3 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^3$. A heißt **stetig**, falls $f^{-1}(U)$ offen in A ist für jede offene Menge U in \mathbb{R}^3 .

Analysis III



Kurven im \mathbb{R}^n

Definition 1.1 Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. γ heißt **regulär**, falls $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.

Definition 1.2 Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. γ heißt **glatt**, falls γ regulär und γ' stetig ist.

Definition 1.3 Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. γ heißt **rektifizierbar**, falls $\int_I |\gamma'(t)| dt < \infty$.

Infos zum Kurs

Literatur

Forschungsbereich

Übungsleitung und Übungen

Dr. Kathrin ...

Ihr Professor

Koordinaten

Abstrakt

Forschungsbereich