

Analysis III

Winter 2017/2018



Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

Buch Kapitel 5.4-5.6

Nachtrag/Fortsetzung Kurven im \mathbb{R}^n

Erinnerung:

Definition (reguläre Kurve im \mathbb{R}^n): Sei $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve. Dann bezeichne $\gamma'(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ :

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_x(t) \\ \dot{\gamma}_y(t) \end{pmatrix}$$

γ heißt **reguläre Kurve**, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Definition (Torsionsvektor):

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve. Dann heißt

$$\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in]a, b[$.

Bemerkungen

- $\dot{\gamma}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\gamma}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{a}(t)$.
- Es folgt: Es existiert eine nicht-triviale $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \tau(t) \mathbf{a}(t)$$

$\tau(t)$ heißt **Torsion** der dreimal stetig diff'baren Kurve γ an $t \in]a, b[$.

Definition (Hauptnormale, Binormale, Serret-Frenet):
Sei $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve (Geschwindigkeit stets positiv und $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ dann definiert).

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &:= \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \text{ der Hauptnormalektor,} \\ \mathbf{b}(t) &:= \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \text{ der Binormalektor aus} \\ \mathbf{n}(t) &:= \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^3 \tau(t) \mathbf{a}(t) \text{ die Serret-Frenet} \end{aligned}$$

der Kurve γ (siehe Bemerkung 2)

ru

Regeln

Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- **Tangentenvektor:**

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

- **Binormalevektor:**

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}$$

- **Hauptnormalevektor:**

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- **Krümmung:**

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

- **Torsion:**

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \dddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)\|^2}$$

Wichtige Regeln:

Sei $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig diff'bare Kurve mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$. Dann gilt:

• **Leibniz:**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) = \frac{\ddot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3}$$

• **Produktregel für $\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}$:**

$$\frac{d}{dt} (\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)) = \ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t) \times \dddot{\gamma}(t)$$

• **Produktregel für die Hauptnormale $\mathbf{n}(t)$:**

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{n}(t) \times \dot{\gamma}(t)) = \ddot{\gamma}(t) \times \dot{\gamma}(t) + \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$$

• **Produktregel für die Torsion $\tau(t)$ (siehe Serret-Frenet):**

$$\frac{d}{dt} (\tau(t) \|\dot{\gamma}(t)\|^3) = \dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)$$

Definition (Bogenlänge):

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve.

Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[a, t]$ definiert als

$$s(t) = \int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

Bemerkungen:

• $\dot{\gamma}(s) = \frac{d\gamma}{ds} = \dot{\gamma}(t) \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$

• Bogenlänge ist $\int_a^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt$ der (euklid.) Bogenstrecke.

Definition (Tangentenvektor):

Sei $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve.

Dann ist der **Tangentenvektor** der Kurve an dem Parameterwert $t \in]a, b[$ gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$



Bemerkungen:

- $\mathbf{t}(t)$ ist ein Einheitsvektor ($\|\mathbf{t}(t)\| = 1$).
- Die Ableitung $\frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right)$ ist orthogonal zum Tangentenvektor $\mathbf{t}(t)$.

Erinnerung:

Definition (reguläre Kurve im \mathbb{R}^n): Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve. Dann bezeichne $\dot{\gamma}(t)$ den Vektor der Ableitungen der Komponenten von γ :

$$\dot{\gamma}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

γ heißt **reguläre Kurve**, falls

$$|\dot{\gamma}(t)| > 0 \quad \forall t \in [t_a, t_e].$$

Idee: Betrachte γ als Bahn eines Punktes, der sich in der Zeit bewegt. Dann bedeutet Regularität, dass die Geschwindigkeit stets positiv ist (Punkt bewegt sich vorwärts).

Ableitungsregeln:

Seien $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbare Abbildungen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- **Linearität:**

$$\frac{d}{dt} (\alpha\gamma_1(t) + \beta\gamma_2(t)) = \alpha\dot{\gamma}_1(t) + \beta\dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Skalarprodukt:

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für das Vektorprodukt ($n = 3$):

$$\frac{d}{dt} (\gamma_1(t) \times \gamma_2(t)) = \dot{\gamma}_1(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \dot{\gamma}_2(t).$$

- **Produktregel** für Multiplikation mit einer stetig diff'baren skalaren Funktion $\alpha(t)$:

$$\frac{d}{dt} (\alpha(t)\gamma_1(t)) = \dot{\alpha}(t) \times \gamma_1(t) + \alpha(t)\dot{\gamma}_1(t).$$

Definition (Bogenlänge):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

Dann ist die **Bogenlänge** des Kurvenstücks über $[t_a, t]$ definiert als

$$s(t) := \int_{t_a}^t |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Bemerkungen:

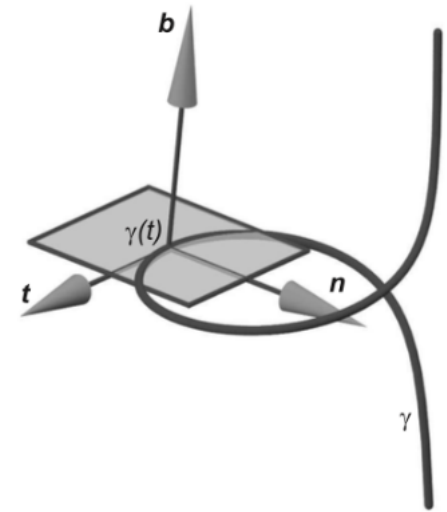
- Es gilt $\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$.
- Bezeichne $ds := |\dot{\gamma}(t)|dt$ das (skalare) Bogenelement.

Definition (Tangentenvektor):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve.

Dann ist der **Tangentenvektor** für den Parameterwert $t \in [t_a, t_e]$ gegeben durch

$$\mathbf{t}(t) := \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}.$$



Bemerkungen:

- Gleichung für die Kurventangente in $\gamma(t_0)$: $\mathbf{x}(\lambda) = \gamma(t_0) + \lambda \mathbf{t}(t)$, ($\lambda \in \mathbb{R}$).
- Die Ebene $E : [\mathbf{x} - \gamma(t)] \cdot \mathbf{t}(t) = 0$ ist die Ebene, die $\gamma(t)$ enthält und $\mathbf{t}(t)$ als Normalenvektor hat.

Definition (Hauptnormale, Binormale, Schmiegebene):

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (beachte $n = 3!$) zweimal (komponentenweise) stetig diff'bar und gelte $\dot{\mathbf{t}}(t) \neq 0$, dann definiert

$$\mathbf{n}(t) := \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} \quad \text{den Hauptnormalenvektor,}$$

$$\mathbf{b}(t) := \mathbf{t}(t) \times \mathbf{n}(t) \quad \text{den Binormalenvektor und}$$

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \gamma(t) + \lambda \mathbf{t}(t) + \mu \mathbf{n}(t), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{die Schmiegebene}$$

der Kurve γ für den Parameterwert t .

Bemerkungen:

- $\mathbf{a}''(t)$ und $\mathbf{b}''(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Lincombektoren.
- $\langle \mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t) \rangle, \langle \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t) \rangle$ ist Rechtssystem und heißt **regeretes Dreiein**.
- Die zu $\mathbf{t}(t)$ geordnete Schmiedatum ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt. Es ist die Gerade eine Ebene durch die Nachbarnote $(t-\epsilon), t, (t+\epsilon)$ ($\epsilon \rightarrow 0$).
- Die Krümmungsgleichung:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{\rho(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \kappa(t)$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsgewicht der Kurve in $[t-\epsilon, t+\epsilon]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|} = \kappa(t)$$

heißt **Krümmungsgewicht**.

- Die Länge des Krümmungsgewichtes:

$$\kappa(t) = \frac{1}{\rho(t)} \quad \langle \mathbf{t}(t) | \mathbf{t}(t) \rangle = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|^2}{|\dot{\mathbf{t}}(t)|^2}$$

heißt man **Krümmung** der Kurve an t .

1

Bemerkungen:

- $\mathbf{n}(t)$ und $\mathbf{b}(t)$ sind zu $\mathbf{t}(t)$ orthogonale Einheitsvektoren.
- $(\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t))$ ist Rechtssystem und heißt **begleitendes Dreibein**.
- Die zu $\gamma(t)$ gehörende Schmiegebene ist die Ebene, die sich am besten anschmiegt: Es ist die Grenzlage einer Ebene durch die Nachbarpunkte $\gamma(t - \tau), \gamma(t), \gamma(t + \tau)$ ($\tau \rightarrow 0$).
- Die Änderungsrate

$$\frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} := \frac{1}{s(t_1) - s(t)} [\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{t}(t)]$$

beschreibt anschaulich das mittlere Krümmungsverhalten der Kurve in $[t_1, t]$.

- Der Grenzwert

$$\lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta s} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\frac{\mathbf{t}(t_1) - \mathbf{r}(t)}{t_1 - t}}{\frac{s(t_1) - s(t)}{t_1 - t}} = \frac{\dot{\mathbf{t}}(t)}{\dot{s}(t)}$$

heißt **Krümmungsvektor**.

- Die Länge des Krümmungsvektors

$$\kappa(t) := \frac{1}{\dot{s}(t)} |\dot{\mathbf{t}}(t)| = \frac{|\dot{\mathbf{t}}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

nennt man **Krümmung** der Kurve an t .

Definition (Torsionsvektor):

Sei $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ dreimal stetig diff'bare Kurve.
Dann heißt

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{b}}{\Delta s}$$

Torsionsvektor für den Parameterwert $t \in]t_a, t_e[$.

Bemerkungen:

- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}(t)$.
- $\dot{\mathbf{b}}(t)$ ist auch orthogonal zu $\mathbf{t}(t)$
- Es folgt: Es existiert eine skalare Funktion $\tau = \tau(t)$ mit

$$\frac{1}{\dot{s}(t)} \dot{\mathbf{b}}(t) = -\tau(t) \mathbf{n}(t).$$

$\tau(t)$ heißt **Torsion** der dreimal stetig diff'baren Kurve γ an $t \in]t_a, t_e[$.

Regeln:

Für eine dreimal stetig diff'bare reguläre Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t) \neq 0$ bestimme:

- **Tangentenvektor:**

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$$

- **Binormalenvektor:**

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}$$

- **Hauptnormalenvektor:**

$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)$$

- **Krümmung:**

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

- **Torsion:**

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t), \ddot{\ddot{\gamma}}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \times \ddot{\gamma}(t)|^2}$$

Erinnerung: (Stetigkeit im \mathbb{R})

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz: ($\epsilon - \delta$ -Kriterium)

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0 , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Definition: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt f **stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$** , wenn für alle Folgen $(\mathbf{x}_k) \subset D$ ($k \in \mathbb{N}$), für die gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, auch folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_0).$$

- f heißt **stetig auf $A \subset D$** , wenn für alle $\mathbf{x} \in A$ gilt: f ist stetig in \mathbf{x} .
- f heißt **stetig auf D** , wenn f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

Stetigkeit im \mathbb{R}^n

Erinnerung: (Stetigkeit im \mathbb{R})

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Satz: ($\epsilon - \delta$ Kriterium)

Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in x_0 , wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass gilt:

$$x \in D \text{ und } |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Definition: (Stetigkeit einer Funktion)

- Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt f **stetig in $x_0 \in D$** , wenn für alle Folgen $(x_k) \subset D$ ($k \in \mathbb{N}$), für die gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$, auch folgt, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0).$$

- f heißt **stetig auf $A \subset D$** , wenn für alle $x \in A$ gilt: f ist stetig in x .
- f heißt **stetig auf D** , wenn f auf dem gesamten Definitionsbereich stetig ist.

Definition: (Stetigkeit einer Abbildung im \mathbb{R}^n)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt f **stetig in $x_0 \in D$** , **stetig auf $A \subset D$** , bzw. **stetig auf D** , wenn f_j stetig in $x_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig in D sind ($j = 1, \dots, m$).

Bemerkungen:

- Wie in \mathbb{R} lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- **Achtung:** der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

2

Definition: (Maximum, Minimum)

Manchmal **Maximum** der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(x) \leq M \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt und wenn es ein $x_M \in D$ mit $f(x_M) = M$ gibt.

Man heißt **Minimum** der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(x) \geq m \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt und wenn es ein $x_m \in D$ mit $f(x_m) = m$ gibt.

Satz: (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)

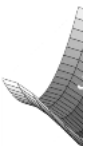
Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und D eine kompakte Menge.

Dann nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

Bemerkung: Vergleich mit Satz von Weierstraß für $n = 1$ und D abgeschlossenem Intervall.

Ana

Wi



Stetigkeit un

B

Definition: (Stetigkeit einer Abbildung im \mathbb{R}^n)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, mit

$$D \subset \mathbb{R}^n, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Dann heißt f **stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$** , **stetig auf $A \subset D$** , bzw. **stetig auf D** , wenn f_j stetig in $\mathbf{x}_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$, bzw. stetig in D sind ($j = 1, \dots, m$).

Bemerkungen:

- Wie in \mathbb{R} lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen nachweisen (Funktionen können aus Elementarfunktionen komponiert werden).
- **Achtung:** der Grenzwert wird nicht in einem Intervall (eine Veränderliche) gesucht!

Definition: (Maximum, Minimum)

M heißt **Maximum** der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq M \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_M \in D$ mit $f(\mathbf{x}_M) = M$ gibt.

m heißt **Minimum** der Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq m \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in D$$

gilt und wenn es ein $\mathbf{x}_m \in D$ mit $f(\mathbf{x}_m) = m$ gibt.

Satz: (Maximum und Minimum auf kompakten Mengen)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion und D eine kompakte Menge.

Dann nimmt f auf D Maximum und Minimum an.

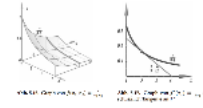
Bemerkung: Vergleiche mit Satz von Weierstrass für $n = 1$ und D abgeschlossenes Intervall.

Partielle Ableitung

Geometrische Interpretation

Beachte: $f(x,y) = \frac{1}{2xy}$, $f(x,y) = x^2 + 3y^2$.

- Die Tangentialebene $T_x f$ ist die Ebene in \mathbb{R}^3 .
- Eine Ebene E durch (x_0, y_0, z_0) bedeutet: $ax + by + cz = d$.
- Ebenen sind Schnittlinien zweier partieller Funktionen.
- Die partielle Ableitung entspricht dem Anstieg der partiellen Funktion in \mathbb{R}^2 (normiert nach x_j).



Idee:

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegebene Funktion und D offene Menge.

- Fixiere x_0 (als auf einer x_j) Veränderliche:

$$f(x_0, x_2, \dots, x_n) = f(x_0, x_2, \dots, x_n) = f(x_0, x_2, \dots, x_n)$$

- Durch

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = f(x_0, x_2, \dots, x_n) \text{ (mit } x_0, x_2, \dots, x_n \text{ fest)}$$

mit $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine univariante Funktion einer Veränderlichen gegeben.

- Ist f differenzierbar in $x_0 = x_0$, so nennt man diese Ableitung **partielle Ableitung** der Funktion f nach x_0 im Punkt $x = (x_0, x_2, \dots, x_n)^T$.

• Schreibweise: $\frac{\partial f(x)}{\partial x_0} = \frac{df}{dx_0}(x)$

3

Satz von Schwarz (Vertauschung partielle Ableitungen)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, f stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{für } x \in D$$

invariante Form, d.h. die Reihenfolge der Ableitungen ist beliebig wählbar. Die Reihenfolge der Ableitungen $\{1, 2, \dots, n\}$ lässt sich beliebig wählen. Die Reihenfolge der Ableitungen $\{1, 2, \dots, n\}$ lässt sich beliebig wählen.

Definition: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T$.

f ist **partiell differenzierbar** in $x_0 \in D$, **partiell diff'bar** auf $A \subset D$, bzw. **partiell diff'bar** (falls alle f_j , $j = 1, \dots, m$) **partiell diff'bar** in x_0 , **partiell diff'bar** auf $A \subset D$, bzw. **partiell diff'bar** sind.

Definition: (partielle Ableitung)

Sei die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e_j h) - f(x_0) + f(x_0 - e_j h) - f(x_0)}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + e_j h) - f(x_0)}{h}$$

so ist die Funktion f an x_0 **partiell differenzierbar** nach x_j . Durch

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + e_j h) - f(x)}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** von f nach x_j in x_0 definiert.

Definition: (höhere partielle Ableitungen)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, so heißt

$$f_{i,j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x)$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_i und x_j .

Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt f **zweimal partiell differenzierbar**.

Die Ableitungen oder **partielle Ableitungen 1-ter Ordnung** werden entsprechend rekursiv definiert.

Weitere Definitionen:

- Ist f auf $A \subset D$ (A offen) partiell differenzierbar nach x_j in allen $x \in A$, so heißt f **partiell differenzierbar auf A** nach x_j .
- Ist f auf ganz D partiell differenzierbar nach x_j , so heißt f **partiell differenzierbar** nach x_j .
- Alternative Notation: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ verwendet auch einfacher f_{x_j} .
- Existieren alle partiellen Ableitungen von f , so heißt f **partiell differenzierbar**.

Definition: (stetig partiell differenzierbar)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, gegebene Funktion. f ist **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in D existieren und stetig sind.

4

Definition (Gradient)

Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\text{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von f .

Die Ableitung $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.



Idee:

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ gegebene Funktion und D offene Menge.

- Fixiere alle (bis auf eine x_j) Veränderliche:

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_{j-1} = a_{j-1}, x_{j+1} = a_{j+1}, \dots, x_n = a_n.$$

- Durch

$$f^* : d \rightarrow \mathbb{R}, f^*(x_j) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

mit $d \subset \mathbb{R}$ ist eine *partielle* Funktion einer Veränderlichen gegeben.

- Ist f^* differenzierbar in $x_j = a_j$, so nennt man diese Ableitung **partielle Ableitung** der Funktion f nach x_j im Punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$.
- Schreibweise:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Geometrische Interpretation:

Betrachte

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

- Der Graph von f ist eine Fläche im \mathbb{R}^3
- Fixieren einer Variablen (z.B. $x_2 = 3$) bedeutet: Schnitt mit der Fläche in Ebene $X_2 = 3$
- Ergebnis des Schnittes: Graph der partiellen Funktion.
- Partielle Ableitung entspricht dann Anstieg der partielle Funktion in Koordinatenrichtung x_1 .

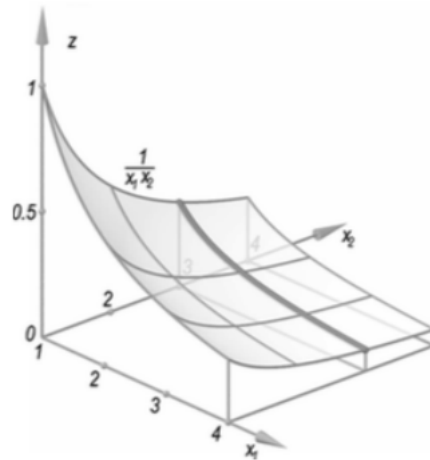


Abb. 5.16. Graph von $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 x_2}$

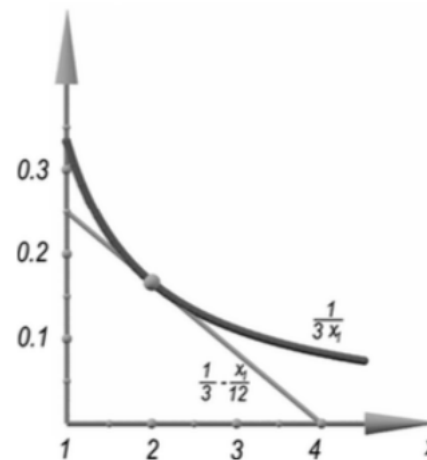


Abb. 5.17. Graph von $f^*(x_1) = \frac{1}{3x_1}$ einschließlich Tangente an f^*

Definition: (partielle Ableitung)

Sei die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist.

Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

so ist die Funktion f an \mathbf{x} **partiell differenzierbar** nach x_j . Durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die **partielle Ableitung** von f nach x_j in \mathbf{x} definiert.

Weitere Definitionen:

- Ist f auf $A \subset D$ (A offen) partiell differenzierbar nach x_j in allen $\mathbf{x} \in A$, so heißt f **partiell differenzierbar auf A** nach x_j .
- Ist f auf ganz D partiell differenzierbar nach x_j , so heißt f **partiell differenzierbar nach x_j** .
- Alternative Notation: Statt $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ verwende auch einfacher f_{x_j} .
- Existieren alle partiellen Ableitungen von f , so heißt f **partiell differenzierbar**.

Definition: (stetig partiell differenzierbar)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, gegebene Funktion. f ist in D **stetig partiell differenzierbar**, wenn alle partiellen Ableitungen in D existieren und stetig sind.

Definition: (Gradient)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der **Gradient** von f .

Die Abbildung $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.

Definition: (höhere partielle Ableitungen)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Falls die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

existiert, so heißt

$$f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (\mathbf{x})$$

zweite partielle Ableitung von f nach x_i und x_j .

Existieren alle zweiten Ableitungen, heißt f **zweimal partiell differenzierbar**.

k -te Ableitungen oder **partielle Ableitungen k -ter Ordnung** werden entsprechend rekursiv definiert.

Satz von Schwarz: (Vertauschbarkeit partieller Ableitungen)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, 4p4-mal stetig partiell differenzierbare Funktion.

Dann ist die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}}, \quad 1 < k \leq p,$$

invariant unter Permutationen der $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$, d.h. die Reihenfolge der $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$ lässt sich beliebig wählen. Die Indizes sind dabei beliebige Elemente in $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definition: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)

Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top$.

\mathbf{f} ist **partiell differenzierbar** in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar, falls alle f_j ($j = 1, \dots, m$) partiell diff'bar in \mathbf{x}_0 , partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar sind.

Stetigkeit im \mathbb{R}^n

Übung 15 (16.11.17)
 Ein Teil $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **offen**, falls für jeden Punkt $x \in D$ ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass $B_\epsilon(x) \subseteq D$ gilt.
 Ein Teil $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **geschlossen**, falls $D = \overline{D}$ gilt.
 Ein Teil $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, falls D abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition: Stetigkeit
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. f heißt **stetig** in $x_0 \in D$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $\|x - x_0\| < \delta$ gilt $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$.
 f heißt **stetig** auf D , falls f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

Definition: Stetigkeit einer Abbildung im \mathbb{R}^n
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit

$$D \subseteq \mathbb{R}^n, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

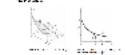
Dann heißt f stetig in $x_0 \in D$, wenn auf $A \subset D$ bzw. stetig auf D , wenn f_j stetig in $x_0 \in D$, stetig auf $A \subset D$ bzw. stetig in D und $D = \{1, \dots, m\}$.

Bemerkungen:

- In \mathbb{R} lässt sich Stetigkeit häufig über elementare Funktionen schreiben (Polynome, Potenz, Exponentialfunktion, Logarithmus, etc.).
- Achtung: die Funktion ist nicht in einem Intervall (bzw. rektifiziert) stetig!

Partielle Ableitung

Definition: Partielle Ableitung
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Die **partielle Ableitung** von f nach x_i in $x_0 \in D$ ist die Ableitung der Funktion $f_i(x_0 + t e_i)$ in $t=0$.
 Die **partielle Ableitung** von f nach x_i in $x_0 \in D$ ist die Ableitung der Funktion $f_i(x_0 + t e_i)$ in $t=0$.



Definition: Richtungsableitung
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Die **Richtungsableitung** von f in $x_0 \in D$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Ableitung der Funktion $f(x_0 + t v)$ in $t=0$.

Definition: Richtungsableitung
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Die **Richtungsableitung** von f in $x_0 \in D$ in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ ist die Ableitung der Funktion $f(x_0 + t v)$ in $t=0$.

Analysis III

Winter 2017/2018



Stetigkeit und Differenzierbarkeit im \mathbb{R}^n

Mathematik 11.01.18

Nachtrag/Fortsetzung Kurven im \mathbb{R}^n

Definition: Kurve
 Eine **Kurve** im \mathbb{R}^n ist eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist.
 Die **Parameterisierung** einer Kurve γ ist die Abbildung $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$.
 Die **Strecke** einer Kurve γ ist die Menge $\gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.
 Die **Umlänge** einer Kurve γ ist die Länge der Kurve γ .