Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Hesse-Matrix und Differenzialtionsregeln

Buch Kapitel 5.6-5.9

Erinnerung: Partielle Ableitung

Definition: (partielle Ableitung)
Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist.
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

so ist die Funktion f an $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach x_j. Durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die partielle Ableitung von f nach x_j in $\mathbf{x}$ definiert.

Definition: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))^\top$.

f ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar, falls alle f_j $(j = 1, \dots, m)$ partiell diff'bar in $\mathbf{x}_0$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar sind.

Definition: (Gradient)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der Gradient von f.

Die Abbildung $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.

Definition: (partielle Ableitung)
Sei die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben, wobei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene Menge ist.
Existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

so ist die Funktion f an $\mathbf{x}$ partiell differenzierbar nach x_j. Durch

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} := \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}$$

ist die partielle Ableitung von f nach x_j in $\mathbf{x}$ definiert.

Definition: (Gradient)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, partiell differenzierbare Funktion. Dann heißt der Vektor

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der Gradient von f.

Die Abbildung $\nabla f : D \to \mathbb{R}^n$ ist vektorwertig.

Definition: (Partielle Ableitungen vektorwertiger Funktionen)
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))^\top$.

$\mathbf{f}$ ist partiell differenzierbar in $\mathbf{x}_0 \in D$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar, falls alle f_j $(j = 1, \ldots, m)$ partiell diff'bar in $\mathbf{x}_0$, partiell diff'bar auf $A \subset D$, bzw. partiell diff'bar sind.

Ableitungsmatrix

Definition (Ableitungsmatrix):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

die in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

und die Ableitungsmatrix ist definiert als

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

1

Andere Bezeichnungen für diese Matrix:*Ableitung von* $\mathbf{f}$ oder *Jacobi-Matrix*.

Bemerkung (Ableitung und Gradient):
Falls $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige Abbildung ist, so gelten die folgenden Beziehungen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^\top \quad \text{bzw.} \quad f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^\top.$$

Bemerkungen

- Die j-te Spalte der Hesse-Matrix ist die partielle Ableitung nach x_j des Gradienten von f.
- Oder: ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, so gilt
$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = H_f(\mathbf{x}).$$
- Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.

2

Definition (Hessematrix):
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige in $\mathbf{x} \in D$ zweifach partiell differenzierbare Funktion mit Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist definiert durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Definition (Ableitungsmatrix):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

die in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

und die Ableitungsmatrix ist definiert als

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Andere Bezeichnungen für diese Matrix: *Ableitung von* $\mathbf{f}$ oder *Jacobi-Matrix*.

Bemerkung (Ableitung und Gradient):
Falls $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige Abbildung ist, so gelten die folgenden Beziehungen

$$\nabla f(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})^\top \quad \text{bzw.} \quad f'(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})^\top .$$

Definition (Hessematrix):
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige in $\mathbf{x} \in D$ zweifach partiell differenzierbare Funktion mit Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist definiert durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen

- Die j-te Spalte der Hesse-Matrix ist die partielle Ableitung nach x_j des Gradienten von f.
- Oder: ist $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$, so gilt

$$\mathbf{g}'(\mathbf{x}) = H_f(\mathbf{x}).$$

- Die Hesse-Matrix ist symmetrisch.

2

Differenzierbarkeit von Abbildungen

Vorbemerkung:
Für Funktionen $: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ hatten wir Differenzierbarkeit definiert durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dies ist für $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht möglich, da durch Vektoren nicht geteilt werden kann!

Definition (Differenzierbarkeit von Abbildungen im $\mathbb{R}^n$):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $\mathbf{x}_0 \in D$. Dann heißt $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar, wenn sie in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist und geschrieben werden kann als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x}),$$

wobei $\mathbf{k} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die gilt:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{k}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0.$$

$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls $\mathbf{f}$ in jedem Punkt von A diff'bar ist.
$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar, falls $A = D$.

3

Satz (Kriterium für Differenzierbarkeit von Abbildungen):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $\mathbf{x}_0 \in D$ innerer Punkt.
$\mathbf{f}$ ist in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $\mathbf{f}$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}_0$ existieren und in $\mathbf{x}_0$ stetig sind.

Bemerkung:
Aus der partiellen Diff'barkeit folgt nicht notwendig die Diff'barkeit.
Aber: aus der Diff'barkeit folgt die partielle Diff'barkeit!

Satz (Formel für die Richtungsableitung):
Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ stetig (ist also f diff'bar in $\mathbf{x}_0$), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}.$$

Bemerkung:
Die partiellen Ableitungen von f nach x_j sind genau die Richtungsableitungen von f in Richtung $\mathbf{e}_j$, denn

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}_0).$$

Differentiationsregeln:

1. **Linearität**: Seien $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, diff'bar in $\mathbf{x}_0$.
   Dann ist auch $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) in $\mathbf{x}_0$ diff'bar und es gilt:

   $$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0).$$

2. **Kettenregel**: Sei $\mathbf{h} : C \to D$, $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$, diff'bar in $\mathbf{x}_0 \in C$,
   und sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.
   Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}_0$ diff'bar und es gilt:

   $$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung (Spezialfall):
Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ergibt sich für die Ableitung der Verkettung:

$$(f \circ \mathbf{h})'(t) = \nabla f(\mathbf{h}(t)) \cdot \mathbf{h}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t)) \frac{dh_k}{dt}(t).$$

4

Definition (Richtungsableitung):
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$, und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Falls der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0) \right)$$

existiert, dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0) \right)$$

Richtungsableitung der Funktion f in Richtung $\mathbf{a}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$.

Vorbemerkung:
Für Funktionen : $D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ hatten wir Differenzierbarkeit definiert durch

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Dies ist für $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nicht möglich, da durch Vektoren nicht geteilt werden kann!

Definition (Differenzierbarkeit von Abbildungen im $\mathbb{R}^m$):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $\mathbf{x}_0 \in D$. Dann heißt $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar, wenn sie in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist und geschrieben werden kann als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{k}(\mathbf{x}),$$

wobei $\mathbf{k} : D \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung ist, für die gilt:

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{|\mathbf{k}(\mathbf{x})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0.$$

$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar in $A \subset D$, falls $\mathbf{f}$ in jedem Punkt von A diff'bar ist.
$\mathbf{f}$ heißt differenzierbar, falls $A = D$.

Satz (Kriterium für Differenzierbarkeit von Abbildungen):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung und $\mathbf{x}_0 \in D$ innerer Punkt.
$\mathbf{f}$ ist in $\mathbf{x}_0$ differenzierbar, wenn alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $\mathbf{f}$ in einer Umgebung von $\mathbf{x}_0$ existieren und in $\mathbf{x}_0$ stetig sind.

Bemerkung:
Aus der partiellen Diff'barkeit folgt nicht notwendig die Diff'barkeit.
Aber: aus der Diff'barkeit folgt die partielle Diff'barkeit!

Differentiationsregeln:

1. **Linearität**: Seien $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, diff'bar in $\mathbf{x}_0$.
   Dann ist auch $\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ in $\mathbf{x}_0$ diff'bar und es gilt:
   $$(\lambda\mathbf{f} + \mu\mathbf{g})'(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) + \mu\mathbf{g}'(\mathbf{x}_0).$$

2. **Kettenregel**: Sei $\mathbf{h} : C \to D$, $C \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^p$, diff'bar in $\mathbf{x}_0 \in C$,
   und sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$ diff'bar in $\mathbf{z}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0)$.
   Dann ist auch $\mathbf{f} \circ \mathbf{h} : C \to \mathbb{R}^m$ in $\mathbf{x}_0$ diff'bar und es gilt:
   $$(\mathbf{f} \circ \mathbf{h})'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{z}_0)\mathbf{h}'(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung (Spezialfall):
Falls $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, so ergibt sich für die Ableitung der Verkettung:

$$(f \circ \mathbf{h})'(t) = \nabla f(\mathbf{h}(t)) \cdot \mathbf{h}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{h}(t)) \frac{dh_k}{dt}(t).$$

4

Definition (Richtungsableitung):
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $D \subset \mathbb{R}^n$, und ein Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| = 1$ gegeben. Falls der Grenzwert

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0) \right)$$

existiert, dann heißt

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x}_0) \right)$$

Richtungsableitung der Funktion f in Richtung $\mathbf{a}$ an der Stelle $\mathbf{x}_0$.

Satz (Formel für die Richtungsableitung):
Sind die partiellen Ableitungen von f in $\mathbf{x}_0$ stetig (ist also f diff'bar in $\mathbf{x}_0$), dann gilt für die Richtungsableitung von f in Richtung $\mathbf{a}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{a}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}.$$

Bemerkung:
Die partiellen Ableitungen von f nach x_j sind genau die Richtungsableitungen von f in Richtung $\mathbf{e}_j$, denn

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_j}(\mathbf{x}_0).$$

Lineare Approximation

Vorbemerkung:
In komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert eine (näherungsweise) Lineare Darstellung.
Frage: Kann man die finden?

Idee:
Ist $\mathbf{f}: D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildung, so lässt sie sich in der Nähe von $\mathbf{x}_0 \in D$ durch $\mathbf{g}: D \to \mathbb{R}^m$ darstellen durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Nach der Definition der Diff'barkeit begeht man dabei einen "kleinen" Fehler ($|\mathbf{k}(\mathbf{x})|$).

Definition:
Die eben definierte Abbildung $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ nennt man Tangentialabbildung oder lineare Approximation von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

Bemerkungen (Tangentialebene):

- Betrachte $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$, in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$ diff'bar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + R(x,y) \\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + R(x,y). \end{aligned}$$

- Dementsprechend lautet die Tangentenabbildung

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

- Der Graph von g ist eine Ebene, die Tangentialebene.
- die Tangentialebene berührt in $P = (x_0, y_0, g(x_0,y_0))$ den Graphen der Funktion f, also

$$(x_0, y_0, g(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$$

  In der Umgebung von (x_0, y_0) nähert sich g der Funktion f an.
- Die beiden Tangenten

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) \quad \text{und} \\ z &= f(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

  an die Funktionen $f_1(x) := f(x, y_0)$ bzw. $f_2(y) = f(x_0, y)$ liegen in der Tangentialebene.
- Wegen $R(x,y)$ klein, stellt die Ebene eine gute Näherung der Funktion f in der Umgebung von (x_0, y_0) dar.

Vorbemerkung:
In komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert eine (näherungsweise) Lineare Darstellung.
Frage: Kann man die finden?

Idee:
Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildung, so lässt sie sich in der Nähe von $\mathbf{x}_0 \in D$ durch $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ darstellen durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Nach der Definition der Diff'barkeit begeht man dabei einen "kleinen" Fehler ($|\mathbf{k}(\mathbf{x})|$).

Definition:
Die eben definierte Abbildung $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ nennt man Tangentialabbildung oder lineare Approximation von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

Bemerkungen (Tangentialebene):

- Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$, in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^\top$ diff'bar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + k(x,y) \\ &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + k(x,y). \end{aligned}$$

- Dementsprechend lautet die Tangentenabbildung

$$g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

- Der Graph von g ist eine Ebene, die Tangentialebene.

- die Tangentialebene berührt in $P = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ den Graphen der Funktion f, also

$$(x_0, y_0, g(x_0, y_0)) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

  In der Umgebung von (x_0, y_0) nähert sich g der Funktion f an.

- Die beiden Tangenten

$$\begin{aligned} z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) \quad \text{und} \\ z &= f(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

  an die Funktionen $f*(x) := f(x, y_0)$ bzw. $f**(y) = f(x_0, y)$ liegen in der Tangentialebene.

- Wegen $k(x,y)$ klein, stellt die Ebene eine gute Näherung der Funktion f in der Umgebung von (x_0, y_0) dar.

Analysis III

Differenzierbarkeit von Abbildungen

Lineare Approximation

Erinnerung: Partielle Ableitung

Ableitungsmatrix

Bemerkungen

- Die j-te Spalte der Hesse Matrix ist die partielle Ableitung nach x_j des Gradienten von f.
- Oder: ist $g(x) = \nabla f(x)$, so gilt

$$g'(x) = H_f(x).$$

- Die Hesse Matrix ist symmetrisch.

2