Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Totales Differential, Taylor-Polynom, Mittelwertsatz

Buch Kapitel 5.10-5.11

Erinnerung: Ableitungsmatrix und Lineare Approximation

Definition (Ableitungsmatrix):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

die in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n,$$

und die Ableitungsmatrix ist definiert als

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Andere Bezeichnungen für diese Matrix:*Ableitung von* $\mathbf{f}$ oder *Jacobi-Matrix*.

Definition (Hessematrix):
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige in $\mathbf{x} \in D$ zweifach partiell differenzierbare Funktion mit Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist definiert durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen (Tangentialebene):

[illegible]

Vorbemerkung:
In komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert eine (näherungsweise) Lineare Darstellung.
Frage: Kann man die finden?

Idee:
Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildung, so lässt sie sich in der Nähe von $\mathbf{x}_0 \in D$ durch $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ darstellen durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Nach der Definition der Diff'barkeit begeht man dabei einen "kleinen" Fehler ($|\mathbf{k}(\mathbf{x})|$).

Definition:
Die eben definierte Abbildung $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ nennt man Tangentialabbildung oder lineare Approximation von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

Definition (Ableitungsmatrix):
Sei $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Abbildung mit

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in D,$$

die in $\mathbf{x}_0$ partiell diff'bar ist. Dann existieren die Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0), \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,$$

und die Ableitungsmatrix ist definiert als

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_{n-1}}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}.$$

Andere Bezeichnungen für diese Matrix: *Ableitung von* $\mathbf{f}$ oder *Jacobi-Matrix*.

Definition (Hessematrix):
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine skalarwertige in $\mathbf{x} \in D$ zweifach partiell differenzierbare Funktion mit Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Die Hesse-Matrix der Funktion f ist definiert durch

$$H_f(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_{n-1}}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Vorbemerkung:
In komplizierten nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen interessiert eine (näherungsweise) Lineare Darstellung.
Frage: Kann man die finden?

Idee:
Ist $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbare Abbildung, so lässt sie sich in der Nähe von $\mathbf{x}_0 \in D$ durch $\mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^m$ darstellen durch

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{f}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Nach der Definition der Diff'barkeit begeht man dabei einen "kleinen" Fehler $(|\mathbf{k}(\mathbf{x})|)$.

Definition:
Die eben definierte Abbildung $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ nennt man Tangentialabbildung oder lineare Approximation von $\mathbf{f}$ in $\mathbf{x}_0$.

Bemerkungen (Tangentialebene):

- Betrachte $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$, in $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^\top$ diff'bar. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + [f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)] \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + k(x,y) \\
&= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + k(x,y).
\end{aligned}
$$

- Dementsprechend lautet die Tangentenabbildung

$$
g(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)
$$

- Der Graph von g ist eine Ebene, die Tangentialebene.

- die Tangentialebene berührt in $P = (x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ den Graphen der Funktion f, also

$$
(x_0, y_0, g(x_0,y_0)) = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))
$$

  In der Umgebung von (x_0, y_0) nähert sich g der Funktion f an.

- Die beiden Tangenten

$$
\begin{aligned}
z &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) \quad \text{und} \\
z &= f(x_0,y_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)
\end{aligned}
$$

  an die Funktionen $f*(x) := f(x, y_0)$ bzw. $f**(y) = f(x_0, y)$ liegen in der Tangentialebene.

- Wegen $k(x,y)$ klein, stellt die Ebene eine gute Näherung der Funktion f in der Umgebung von (x_0, y_0) dar.

Totales Differential

Idee:
Verwende die allgemeine Definition von $f'(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \Delta z &= f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Da $|k(\mathbf{x})|$ sehr klein ist für $|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|$ klein,
ist $\Delta z \approx f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ dann eine gute Näherung.

Definition: (totales Differential)
Verwende folgende Notation:

- $d\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, in Komponentendarstellung $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)^\top$.
- $dz := f'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$

Die durch

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)dx_j$$

beschriebene lineare Funktion mit den Variablen $dx_1, \ldots, dx_n$ heißt
totales Differential (auch vollständiges Differential) von f in $\mathbf{x}_0$.

Bemerkungen:

- Das totale Differential kann als Funktion $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden mit

$$df(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)dx_j.$$

- Vereinbart man $\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, so kann man das totale Differential auch schreiben:

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j}dx_j$$

1

Motivation:
Wir wollen ein Analogon zur Differenz (in $\mathbb{R}$)

$$\Delta z := f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

für Funktionen mehrerer Veränderlicher finden.

Totales Differ

Idee:
Verwende die allgemeine Definition von $f'(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}) \\ \Rightarrow \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \Delta z &= f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + k(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Da $|k(\mathbf{x})|$ sehr klein ist für $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$ klein,
ist $\Delta z \approx f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ dann eine gute Näherung.

Definition: (totales
Verwende folgende

Definition: (totales Differential)
Verwende folgende Notation:

- $d\mathbf{x} := \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, in Komponentendarstellung $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)^\top$.
- $dz := f'(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}$

Die durch

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)dx_j$$

beschriebene lineare Funktion mit den Variablen $dx_1, \ldots, dx_n$ heißt totales Differential (auch vollständiges Differential) von f in $\mathbf{x}_0$.

beschriebene lineare Funktion mit den Variablen
totales Differential (auch vollständiges Differen

Bemerkungen:

- Das totale Differential kann als Funktion $df : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ aufgefasst werden mit

$$df(dx_1, \ldots, dx_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) dx_j.$$

- Vereinbart man $\frac{\partial z}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$, so kann man das totale Differential auch schreiben:

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j} dx_j$$

1

Taylor-Formel

Motivation.

Vorbemerkung:

- Formalismus für Taylor-Polynom p-ten Grades recht aufwändig! Meist nur 1. und 2. Grad benötigt.
- Taylor-Polynom 1. Grades ist gleich Tangentenabbildung $g(\mathbf{x})$:

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0).$$

Satz: (Taylor-Polynom 2. Grades)
Das Taylor-Polynom 2. Grades einer Funktion f an $\mathbf{x}_0$ kann in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$$

angegeben werden, wobei H_f die Hesse-Matrix von f ist.

Satz: (Taylor-Formel im $\mathbb{R}^n$)
Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine $(p+1)$-mal stetig diff'bare Funktion, sei weiter $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subset D$ ganz in D enthalten. Dann gilt die Taylor-Formel

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{a}) + R(\mathbf{a},\mathbf{h}).$$

Das Restglied R ist gegeben

$$R(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{p+1} f(\mathbf{a}+s\mathbf{h})\,ds.$$

Es gilt die Abschätzung

$$|R(\mathbf{a},\mathbf{h})| \le \frac{|\mathbf{h}|^{p+1}}{(p+1)!}\max_{0\le s\le 1}\sqrt{\sum_{i_1,i_2,\dots,i_{p+1}=1}^{n} |f_{x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_{p+1}}}(\mathbf{a}+s\mathbf{h})|^2}.$$

Beweisidee:

- Abschätzung des Integrals (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) liefert die erste Formel.
- Für die Abschätzung wende Mittelwertsatz für eine Veränderliche auf $F(s) = f(\mathbf{a}+s\mathbf{h})$ an.

Definition: (Taylor-Polynom p-ten Grades im $\mathbb{R}^n$)
Sei $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine $(p+1)$-mal stetig diff'bare Funktion und $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subset D$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) := f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{a})$$

Taylor-Polynom p-ten Grades der Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{a}$.

Bemerkung:
Setze $\mathbf{x} = \mathbf{a}+\mathbf{h}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ (also $\mathbf{h} = \mathbf{x}-\mathbf{x}_0$), so lautet das Taylor-Polynom

$$T_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{x}_0).$$

Motivation:

- Setzt man in der allgemeinen Definition für Differenzierbarkeit von Abbildungen $m = 1$, so erhält man die Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

- Nach der Idee von der linearen Approximation $g(\mathbf{x})$ von $f(\mathbf{x})$ kann man dann schreiben (sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$):

$$g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + f'(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j.$$

- Frage: Kann bei anderen Voraussetzungen an f bessere Approximation erreicht werden?

- Für $n = 1$ hatten wir dafür die Taylor-Formel gefunden!

Tools:

- Der Nabla-Operator ist ein symbolischer Vektor-Operator:

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- ∇ angewandt auf eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ ergibt (wie zuvor verwendet)

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \mathrm{grad} f.$$

- Formale Skalarmultiplikation mit Vektor $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ ergibt

$$\mathbf{h} \cdot \nabla = h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots h_n \frac{\partial}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

- Anwendung auf f:

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

- Die k-te Potenz des Operators sei zu verstehen:

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

- Entsprechend angewendet auf f:

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

$$\cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}.$$

Weitere Vereinfachung:
Falls alle partielle Ableitungen stetig sind, kann der Satz von Schwarz angewendet werden:

$$(\mathbf{h} \cdot \nabla)^k f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k} h_1^{i_1} h_2^{i_2} \cdots h_n^{i_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{i_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i_n} f(\mathbf{x}).$$

Satz: (Taylor-Formel im $\mathbb{R}^n$)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine $(p+1)$-mal stetig diff'bare Funktion; sei weiter $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subset D$ ganz in D enthalten. Dann gilt die Taylor-Formel

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^j f(\mathbf{a}) + R(\mathbf{a},\mathbf{h}).$$

Das Restglied R ist gegeben

$$R(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \int_0^1 \frac{(1-s)^p}{p!}(\mathbf{h}\cdot\nabla)^{p+1} f(\mathbf{a}+s\mathbf{h})\;ds.$$

Es gilt die Abschätzung

$$|R(\mathbf{a},\mathbf{h})| \leq \frac{|\mathbf{h}|^{p+1}}{(p+1)!}\max_{0\leq s\leq 1}\sqrt{\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{p+1}=1}^{n} |f_{x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{p+1}}}(\mathbf{a}+s\mathbf{h})|^2}.$$

Definition: (Taylor-Polynom p-ten Grades im $\mathbb{R}^n$)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ eine $(p+1)$-mal stetig diff'bare Funktion und $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subset D$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann heißt

$$T_p(\mathbf{a}+\mathbf{h}) := f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{a})$$

Taylor-Polynom p-ten Grades der Funktion $f(\mathbf{x})$ an der Stelle $\mathbf{a}$.

Bemerkung:
Setze $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ und $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a}$ (also $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$), so lautet das Taylor-Polynom

$$T_p(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}(\mathbf{h} \cdot \nabla)^j f(\mathbf{x}_0).$$

Satz: (Mittelwertsatz)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ einmal stetig diff'bar und $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ eine im Inneren von D liegende Strecke. Dann gibt es $0 < \theta < 1$, so dass gilt

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^{n} h_j f_{x_j}(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h}).$$

Es gilt die Abschätzung

$$|f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})| \leq |\mathbf{h}| \max_{0\leq s\leq 1} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |f_{x_j}(\mathbf{a}+s\mathbf{h})|^2}.$$

Beweisidee:

- Verwende Taylor-Formel mit $p = 0$:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \int_0^1 (\mathbf{h} \cdot \nabla) f(\mathbf{a}+s\mathbf{h})\, ds.$$

- Abschätzung des Integrals (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung) liefert die erste Formel.

- Für die Abschätzung wende Mittelwertsatz für eine Veränderliche auf $F(s) := f(\mathbf{a}+s\mathbf{h})$ an.

Vorbemerkung:

- Formalismus für Taylor-Polynom p-ten Grades recht aufwändig! Meist nur 1. und 2. Grad benötigt.
- Taylor-Polynom 1. Grades ist gleich Tangentenabbildung $g(\mathbf{x})$:

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Satz: (Taylor-Polynom 2. Grades)
Das Taylor-Polynom 2. Grades einer Funktion f an $\mathbf{x}_0$ kann in der Form

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^\top H_f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

angegeben werden, wobei H_f die Hesse-Matrix von f ist.

2

Erinnerung: Ableitungsmatrix und Lineare Approximation

Totales Differential

Taylor-Formel