Analysis III

16.11.2017

J. Behrens

① ~~Beweis~~ Idee (Satz über implizite Funktionen im $\mathbb{R}^2$)

- Vor: $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$
- Betrachte die verkettete Funktion

$$f(x,y) = 0 \qquad \text{mit} \quad y = g(x)$$

- Kettenregel für Ableitung nach x unter der Ann. $f(x, g(x)) = 0$ für $x \in U$

$$0 = f'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\neq 0} \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'}$$

- Daher folgt:

$$y' = g'(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

② Beispiel:

- Betrachte: $f(x,y,z) = z^3 + xz + y \quad = 0 \quad (*)$

- Frage: Für welche (x,y) lässt sich $(*)$ nach z auflösen?

- Ableitung nach z: $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + x \quad \overset{!}{\neq} 0$

- Satz über impl. Fkt.: Eindeutige Lösbarkeit von $f(x,y,z)=0$ mit $3z^2 + x \neq 0$

- Ableitungen von $z = z(x,y)$:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z(x,y)}{3z^2(x,y)+x} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3z^2(x,y)+x}.$$

- Problem: Würde man $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ wirklich ausrechnen wollen, dann müsste man $z(x,y)$ vorher bestimmen ☹

③ Beweis (notwendige Bedingung)

- Sei $\vec{x}_0 = (x_{0_1}, \dots x_{0_n})^T$ lokale Extremalstelle von f.
- Definiere : $g(x_k) := f(x_{0_1}, \dots, x_{0_{k-1}}, x_k, x_{0_{k+1}}, \dots, x_{0_n})$, $k \in \{1, \dots, n\}$

  g ist Funktion einer Veränderlichen $g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$
- Wir wissen : $g(x_{0_k})$ hat ein Extremum
- Satz über impl. Fkt in $\mathbb{R}$:

$$0 = g'(x_{0_k}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}_0) \qquad \square$$

④ **Beweis** (hinr. Kriterium)

- Annahme: $(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0) > 0 \quad \forall \vec{z} \neq 0$
- Taylor-Formel: Es gilt für alle $\vec{z}$, für die die Verbindung $[\vec{x}_0, \vec{x}_0+\vec{z}] \subset D$

$$f(\vec{x}_0+\vec{z}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0)\vec{z} + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0+s\vec{z})\,ds$$

$s\in[0,1]$

- wegen $f'(\vec{x}_0) = 0$

$$f(\vec{x}_0+\vec{z}) = f(x_0) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0+s\vec{z})\,ds \qquad (**)$$

- Nach Vor. $\vec{x}_0$ innerer Punkt in D und $(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(x_0) > 0 \quad \forall \vec{z}\neq 0$, d.h. Es gibt Umgebung $U \subset D$ von x_0 mit

$$(z\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0+s\vec{z}) > 0 \quad \text{für } \vec{x}_0+s\vec{z} \in U, \ \vec{z}\neq 0, \ 0<s<1$$

gilt wegen Stetigkeit der 2. part. Ableitungen

- Wählt man $\vec{z}$ fest, so nimmt $\underbrace{(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0+s\vec{z})}_{\text{stetig in } s}$ für $s\in[0,1]$ sein Minimum c an, wg. Stetigkeit.
- Es gilt also $(\vec{z}\cdot\nabla)^2 f(\vec{x}_0+s\vec{z}) \geq c > 0 \quad \forall s\in[0,1]$
- Einsetzen in (**):

$$f(\vec{x}_0+\vec{z}) - f(\vec{x}_0) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 (1-s)\,c\,ds = \frac{c}{4} > 0$$

- Also $f(\vec{x}_0-\vec{z}) > f(\vec{x}_0)$ für jedes $(\vec{x}_0+\vec{z}) \in U$, $\vec{z}\neq 0$
- Für Maximum verfährt man analog mit $-f$ $\square$

⑤ Beweis (Alternative hinreichende Bedingung)

- Hesse-Matrix ist reell und symmetrisch
  $\rightarrow$ Es existiert eine orthogonale Eigenvektorbasis
  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ so dass $\vec{z} = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{x}_k \quad , c_k \in \mathbb{R}$

- Für die Eigenwerte von $H_f(\vec{x}_0)$:

$$H_f(x_0)\, \vec{x}_k = \lambda_i \vec{x}_k \qquad (k = 1, \dots, n)$$

- Daher $H_f(\vec{x}_0)\vec{z} = H_f(\vec{x}_0) \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \vec{x}_k$

- Skalarmult. von links mit $\vec{z}^T$:

$$\vec{z}^T H_f(\vec{x}_0)\vec{z} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{x}_j^T \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k \vec{x}_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k^2 \alpha^2$$

  denn da $\vec{x}_k$ orthogonale Basis gewählt:

$$x_j^T x_k = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ \alpha^2 \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases}$$

- Damit ist $\vec{z}^T H_f(\vec{x}_0)\vec{z} < 0$ falls alle EW $\lambda_k < 0$
  $\rightarrow$ x_0 Maximalstelle
- Analog für Minimalstelle $\square$

⑥ Beispiel

- Betrachte : $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7$, $\vec{x} = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$

- Ziel : finde Extremum!

- $f'(x_0) = 0$: $2x + y - 2 = 0$
$$2y + x + 3 = 0$$

- Lösung : $x = \frac{7}{3}$, $y = -\frac{8}{3}$

- $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = 2$, f_{xy} 1

$\Rightarrow$ $D = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$

$\Rightarrow$ $x_0 = \left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right)^T$ ist eine Minimalstelle.