

Analysis III

Winter 2017/2018



Satz über implizite Funktionen, Extrema

Buch Kapitel 5.12-5.13

Vorüberlegungen

Bemerkungen:

- An verschiedenen Stellen verwendet:

$$f(x, y) = 0 \quad \text{oder allgemein} \quad f(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Beispiele:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

- **Frage:** Kann $f(x, y) = 0$ nach y "aufgelöst" werden?
- Möglich:
 - Es gibt keine Lösung (z.B. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$)
 - Es existieren mehrere y -Werte zu x (z.B. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$)

Satz über Implizite Funktionen

Satz: (Satz über implizite Funktionen, *SD*)
 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, stetig partiell diff'bar. Für $(x_0, y_0)^T \in D$ sei
 $f(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle U um x_0 und V um y_0 , so dass gilt:
 $\forall x \in U \exists! y \in V : f(x, y) = 0$.

Jedem $x \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g: U \rightarrow V$ mit $y = g(x)$ erfüllt:

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $x \in U$:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}. \quad \text{1}$$

Satz: (Satz über implizite Funktionen, *allgemeiner Fall*)

Sei durch $f(x, y) = f(x_1, \dots, x_n, y)$ eine stetig partiell diff'bare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach \mathbb{R} abbildet. Für $(x_0, y_0)^T \in D$ sei $f(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle $U \subset \mathbb{R}^n$ um x_0 und $V \subset \mathbb{R}$ um y_0 , so dass gilt:

$$\forall x \in U \exists! y \in V : f(x, y) = 0.$$

Jedem $x \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g: U \rightarrow V$ mit $y = g(x)$ erfüllt

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $x \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}. \quad \text{2}$$

Satz: (Satz über implizite Funktionen, 2D)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, stetig partiell diff'bar. Für $(x_0, y_0)^\top \in D$ sei

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle U um x_0 und V um y_0 , so dass gilt:

$$\forall x \in U \exists! y \in V : f(x, y) = 0.$$

Jedem $x \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \rightarrow V$ mit $y = g(x)$ erfüllt

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $x \in U$:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$



Satz: (Satz über implizite Funktionen, **allgemeiner Fall**)

Sei durch $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \dots, x_n, y)$ eine stetig partiell diff'bare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach \mathbb{R} abbildet. Für $(\mathbf{x}_0, y_0)^\top \in D$ sei $f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle $U \subset \mathbb{R}^n$ um \mathbf{x}_0 und $V \subset \mathbb{R}$ um y_0 , so dass gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists! y \in V : f(\mathbf{x}, y) = 0.$$

Jedem $\mathbf{x} \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \rightarrow V$ mit $y = g(\mathbf{x})$ erfüllt

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $\mathbf{x} \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$



Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

Definition: (lokale/relative Extrema)
Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in D$ mit Umgebung U von x_0 .

- Falls $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, so ist x_0 **lokale oder relative Maximalstelle** von f und f besitzt ein **lokales oder relatives Maximum**.
- Gilt in der obigen Ungleichung $f(x) < f(x_0)$, so heißt x_0 **echte lokale Maximalstelle** von f .
- Gilt entsprechend $f(x) \geq f(x_0)$ bzw. $f(x) > f(x_0)$, so heißt x_0 (echte) **lokale Minimalstelle** von f und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extremalstelle in \mathbb{R}^2)
Sei $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $x_0 = (x_0, y_0) \in U$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

gilt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{in} \quad (x_0, y_0)$$

- echte lokale Maximalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$,
- echte lokale Minimalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Erinnerung:
Aus der Taylorformel erhalten wir, dass wir schreiben können
 $(z \cdot \nabla)^2 f(x_0) = z^T H_f(x_0) z$,

wobei $H_f(x_0)$ die Hesse-Matrix ist.

Satz: (Hinreichende Bedingung – Alternative Form)
Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(x_0) = 0$

- echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ alle negativ sind,
- echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(x_0)$ alle positiv sind.

Bemerkung: (Sattelpunkte)
Hat die Hessematrix $H_f(x_0)$ positive und negative Eigenwerte und $f'(x_0) = 0$, so nennt man zu einem **Sattelpunkt**.

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)
Ist $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Bemerkungen:

- $f'(x_0) = 0$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D .

Idee: Zum Auffinden von Extrema, könnten wir das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

lösen. Dann wäre die Nullstelle x_0 Kandidat für eine Extremalstelle. x_0 nennt man **kritischen** oder **stationären Punkt**.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)
Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(x_0) = 0$

- echte lokale Maximalstelle, falls $(z \cdot \nabla)^2 f(x_0) < 0$,
- echte lokale Minimalstelle, falls $(z \cdot \nabla)^2 f(x_0) > 0$,

für alle $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$.

Definition: (lokale/relative Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ mit Umgebung U von \mathbf{x}_0 .

- Falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

so ist \mathbf{x}_0 **lokale** oder **relative Maximalstelle** von f und f besitzt ein lokales oder relatives **Maximum**.

- Gilt in der obigen Ungleichung $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 **echte** lokale Maximalstelle von f .
- Gilt entsprechend $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ bzw. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 (echte) lokale **Minimalstelle** von f und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)

Ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D .

Idee: Zum Auffinden von Extrema, könnten wir das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

lösen. Dann wäre die Nullstelle \mathbf{x}_0 Kandidat für eine Extremalstelle. \mathbf{x}_0 nennt man **kritischen** oder **stationären Punkt**.



Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.

Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Erinnerung:

Aus der Taylorformel erinnern wir, dass wir schreiben können

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}^\top H_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{z},$$

wobei $H_f(\mathbf{x}_0)$ die Hesse-Matrix ist.

Satz: (Hinreichende Bedingung – Alternative Form)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.

Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,
2. echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind.

5

Bemerkung: (Sattelpunkte)

Hat die Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ positive und negative Eigenwerte und gilt $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, so nennt man \mathbf{x}_0 einen **Sattelpunkt**.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extremalstellen im \mathbb{R}^2)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell diff'bar.

Dann ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^\top \in \overset{\circ}{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Satz über Implizite Funktionen

Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(x, 0) = 0$ und $Df(x, 0) = 0$.
Frage: Wann ist $f(x, y) = 0$ lösbar für y in einer Umgebung von 0 ?

Antwort: Wenn die Jacobimatrix $D_y f(x, 0)$ invertierbar ist, dann existiert eine eindeutige implizite Funktion $y = g(x)$ in einer Umgebung von 0 .

Vorüberlegungen

Notwendige Voraussetzungen:
1. $f(x, 0) = 0$
2. $Df(x, 0) = 0$
3. $D_y f(x, 0)$ invertierbar

Analysis III



Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

Gegeben sei eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
Frage: Wie findet man lokale Extrema?
Antwort: Durch die Nullstellen der Gradientenfunktion $\nabla f(x) = 0$.

Notwendige Bedingung: $\nabla f(x) = 0$
Hinreichende Bedingung: Hesse-Matrix $H_f(x)$ definit.

Beispiel: $f(x, y) = x^2 + y^2$.
Lokalminimum bei $(0, 0)$.