Analysis III

Winter 2017/2018

Satz über implizite Funktionen, Extrema

Buch Kapitel 5.12-5.13

Vorüberlegungen

Bemerkungen:

- An verschiedenen Stellen verwendet:

$$f(x,y) = 0 \quad \text{oder allgemein} \quad f(\mathbf{x}) = 0,\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- Beispiele:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

- Frage: Kann $f(x,y) = 0$ nach y "aufgelöst" werden?
- Möglich:
  - Es gibt keine Lösung (z.B. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$)
  - Es existieren mehrere y-Werte zu x (z.B. $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$)

Satz über Implizite Funktionen

Satz: (Satz über implizite Funktionen, 2D)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, stetig partiell diff'bar. Für $(x_0, y_0)^\top \in D$ sei

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle U um x_0 und V um y_0, so dass gilt:

$$\forall x \in U \exists! y \in V : \ f(x, y) = 0.$$

   Jedem $x \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$ mit $y = g(x)$ erfüllt

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $x \in U$:

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

1

Satz: (Satz über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)
Sei durch $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine stetig partiell diff'bare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Für $(\mathbf{x}_0, y_0)^\top \in D$ sei $f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle $U \subset \mathbb{R}^n$ um $\mathbf{x}_0$ und $V \subset \mathbb{R}$ um y_0, so dass gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists! y \in V : \ f(x, y) = 0.$$

   Jedem $\mathbf{x} \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$ mit $y = g(\mathbf{x})$ erfüllt

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $\mathbf{x} \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$

2

Satz: (Satz über implizite Funktionen, $2D$)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, stetig partiell diff'bar. Für $(x_0, y_0)^\top \in D$ sei

$$f(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle U um x_0 und V um y_0, so dass gilt:

   $$\forall x \in U \exists! y \in V : \; f(x, y) = 0.$$

   Jedem $x \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$ mit $y = g(x)$ erfüllt

   $$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $x \in U$:

   $$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}.$$

1

Satz: (Satz über implizite Funktionen, allgemeiner Fall)
Sei durch $f(\mathbf{x}, y) = f(x_1, \ldots, x_n, y)$ eine stetig partiell diff'bare Funktion beschrieben, die eine offene Menge $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach $\mathbb{R}$ abbildet. Für $(\mathbf{x}_0, y_0)^\top \in D$ sei $f(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$. Dann gilt:

1. Es gibt Intervalle $U \subset \mathbb{R}^n$ um $\mathbf{x}_0$ und $V \subset \mathbb{R}$ um y_0, so dass gilt:

$$\forall \mathbf{x} \in U \exists! y \in V : \; f(x, y) = 0.$$

   Jedem $\mathbf{x} \in U$ ist damit eindeutig ein $y \in V$ zugeordnet. Die dadurch definierte Abbildung $g : U \to V$ mit $y = g(\mathbf{x})$ erfüllt

$$f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

2. g ist stetig diff'bar und es gilt für jedes $\mathbf{x} \in U$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(\mathbf{x}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}.$$

2

Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

Definition: (lokale/relative Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ mit Umgebung U von $\mathbf{x}_0$.

- Falls
$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$
so ist $\mathbf{x}_0$ lokale oder relative Maximalstelle von f und f besitzt ein lokales oder relatives Maximum.
- Gilt in der obigen Ungleichung $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$, so heißt $\mathbf{x}_0$ echte lokale Maximalstelle von f.
- Gilt entsprechend $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ bzw. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, so heißt $\mathbf{x}_0$ (echte) lokale Minimalstelle von f und die Funktion nimmt ein Minimum an.
- Allgemein spricht man von Extremalstellen bzw. Extrema.

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)
Ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt
$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = 0$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\mathring{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D.

3

Idee: Zum Auffinden von Extrema, könnten wir das Gleichungssystem
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$
lösen. Dann wäre die Nullstelle $\mathbf{x}_0$ Kandidat für eine Extremalstelle. $\mathbf{x}_0$ nennt man kritischen oder stationären Punkt.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

4

Erinnerung
Aus der Taylorformel erinnern wir, dass wir schreiben können
$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}^\top H_f(\mathbf{x}_0)\mathbf{z},$$
wobei $H_f(\mathbf{x}_0)$ die Hesse-Matrix ist.

Satz: (Hinreichende Bedingung – Alternative Form)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,
2. echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind.

5

Bemerkung: (Sattelpunkte)
Hat die Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ positive und negative Eigenwerte und gilt $f'(\mathbf{x}_0) = 0$, so nennt man $\mathbf{x}_0$ einen Sattelpunkt.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extremalstellen im $\mathbb{R}^2$)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^\top \in \mathring{D}$ mit
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$
sowie
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ in } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

6

Definition: (lokale/relative Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ mit Umgebung U von $\mathbf{x}_0$.

- Falls
$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$
so ist $\mathbf{x}_0$ lokale oder relative Maximalstelle von f und f besitzt ein lokales oder relatives Maximum.

- Gilt in der obigen Ungleichung $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$, so heißt $\mathbf{x}_0$ echte lokale Maximalstelle von f.

- Gilt entsprechend $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ bzw. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, so heißt $\mathbf{x}_0$ (echte) lokale Minimalstelle von f und die Funktion nimmt ein Minimum an.

- Allgemein spricht man von Extremalstellen bzw. Extrema.

$\mathbb{R}^2)$

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)
Ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D.

3

Idee: Zum Auffinden von Extrema, könnten wir das Gleichungssystem

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

lösen. Dann wäre die Nullstelle $\mathbf{x}_0$ Kandidat für eine Extremalstelle. $\mathbf{x}_0$ nennt man kritischen oder stationären Punkt.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

4

2. echte lokale Minimalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

Erinnerung:
Aus der Taylorformel erinnern wir, dass wir schreiben können

$$(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{z}^\top H_f(\mathbf{x}0)\mathbf{z},$$

wobei $H_f(\mathbf{x}_0)$ die Hesse-Matrix ist.

Satz: (Hinreichende Bedingung – Alternative Form)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \mathring{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle negativ sind,
2. echte lokale Minimalstelle, falls die Eigenwerte der Hesse-Matrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ alle positiv sind.

5

Bemerkung: (Sattelpunkte)
Hat die Hessematrix $H_f(\mathbf{x}_0)$ positive und negative Eigenwerte und gilt $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, so nennt man $\mathbf{x}_0$ einen Sattelpunkt.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extremalstellen im $\mathbb{R}^2$)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell diff'bar.
Dann ist $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^\top \in \mathring{D}$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

sowie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \text{ in } \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$.

6

Satz über Implizite Funktionen

Vorüberlegungen

Analysis III

Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)