

Analysis III

Winter 2017/2018



Extrema mit Nebenbedingungen
Ausgleichsrechnung

Buch Kapitel 5.14-5.15

Erinnerung: Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

Definition: (lokale/relative Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ mit Umgebung U von \mathbf{x}_0 .

- Falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

so ist \mathbf{x}_0 **lokale** oder **relative Maximalstelle** von f und f besitzt ein lokales oder relatives **Maximum**.

- Gilt in der obigen Ungleichung $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 **echte** lokale Maximalstelle von f .
- Gilt entsprechend $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ bzw. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 (echte) lokale **Minimalstelle** von f und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.

Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)

Ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D .

Definition: (lokale/relative Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in D$ mit Umgebung U von \mathbf{x}_0 .

- Falls

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in U \cap D, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,$$

so ist \mathbf{x}_0 **lokale** oder **relative Maximalstelle** von f und f besitzt ein lokales oder relatives **Maximum**.

- Gilt in der obigen Ungleichung $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 **echte** lokale Maximalstelle von f .
- Gilt entsprechend $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ bzw. $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$, so heißt \mathbf{x}_0 (echte) lokale **Minimalstelle** von f und die Funktion nimmt ein **Minimum** an.
- Allgemein spricht man von **Extremalstellen** bzw. **Extrema**.

ing für Extrema)

mal stetig diff'bar

Satz: (Notwendige Bedingung für Extre

-unktion nimmt ein **Minimum** an.

Istellen bzw. **Extrema**.

Satz: (Notwendige Bedingung für Extrema)

Ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ lokale Extremalstelle einer partiell diff'baren Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,
 $D \subset \mathbb{R}^n$, so gilt

$$f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Bemerkungen:

- $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen von f verschwinden.
- $\overset{\circ}{D}$ bezeichnet die inneren Punkte von D .

lokale **Minimalstelle** von f und die

- Allgemein spricht man von **Extrem**

Satz: (Hinreichende Bedingung für Extrema)

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig diff'bar.

Dann ist $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{D}$ mit $f'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$

1. echte lokale Maximalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$,
2. echte lokale Minimalstelle, falls $(\mathbf{z} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$,

für alle $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Extremalaufgaben (mit Nebenbedingungen)

Verteilung (Musterklausur)

- Prüfung und Bewertung einer Funktion f gesucht, die mehrere Bedingungen genügt. **Nebenbedingungen** der Form $h(x) = 0$.
- Was ist ein $x_0 \in D$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $h: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $h(x_0) = 0$. Gesucht sind alle Extrempunkte der Restriktion $f|_{h^{-1}(0)}$ mit $x_0 \in h^{-1}(0) \cap D$.
- Für $x \in h^{-1}(0) \cap D$ = Extremwertkandidat im Gebirgsgebiet: M ist die Tangentialgerade T_x mit $h(x) = 0$.
- Wie $x \in D$ in $h^{-1}(0)$, nur was $x_0 \in D$ also $h(x_0) = 0$ über alle x_0 im Gebirgsgebiet für $h(x)$.

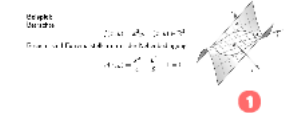


Definition (Mengen-Verbindlichkeit)
 Eine Menge M ist **verbindlich**, falls es eine Kurve $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ gibt, die M in D in einer Umgebung U von D verbindet.

Satz (Lagrange-Multiplikatoren)
 Analog, es sind **Lagrange-Multiplikatoren**.

Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$
 mit $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
 (Einheitskreis)

Lösung:
 Die Extremwerte von f auf $h^{-1}(0)$ sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ mit $f = 1$ sowie $(0,1)$ und $(0,-1)$ mit $f = 1$.



Satz (Notwendige Extremalbedingung bei einer Nebenbedingung)
 Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell diffbar auf offener Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
 Es gelte $\nabla g(x) \neq 0$ für jedes $x \in D$.
 Ist dann $x_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$, so gilt
 $\nabla f(x_0) + \lambda \nabla g(x_0) = 0$
 mit $\lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-Multiplikator.

Satz (Notwendige Extremalbedingung bei m Nebenbedingungen)
 Seien $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diffbar auf offener Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$,
 $m < n$, wobei die Jacob-Matrix $J_h(x)$ für jedes $x \in D$ den Rang m hat.
 Ist dann $x_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle unter Nebenbedingung $h(x) = 0$, so existiert dann eine $(1 \times m)$ -Matrix $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (Lagrange-Multiplikatoren) mit
 $\nabla f(x_0) - \Lambda J_h(x_0) = 0$ und $h(x_0) = 0$.
 Die reellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

- Bemerkungen**
- Die Satzformel ist notwendig. Falls x_0 Extremum von f unter Nebenbedingung $h(x) = 0$ ist, so erfüllt sie die Gleichung $\nabla f(x_0) - \Lambda J_h(x_0) = 0$ und $h(x_0) = 0$.
 - Frage: Wie kann man Extremalbedingung $h(x) = 0$ überprüfen?

Idee: Mit den folgenden Variablen
 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}$ und $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

Schreib man
 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial h_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n$

und
 $h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, m.$

Also gibt es $n+1$ Gleichungen für $n+1$ Unbekannte $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.
 Die Lösungen $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ heißen **stationäre oder kritische Punkte** und sie sind die Kandidaten für Extremalstellen.

Vorbemerkung: (Motivation)

- Häufig sind Extremwerte einer Funktion f gesucht, die weiteren Bedingungen genügen, **Nebenbedingungen** der Form

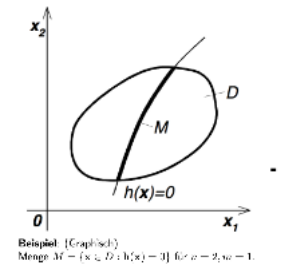
$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0.$$

- Man nimmt an:

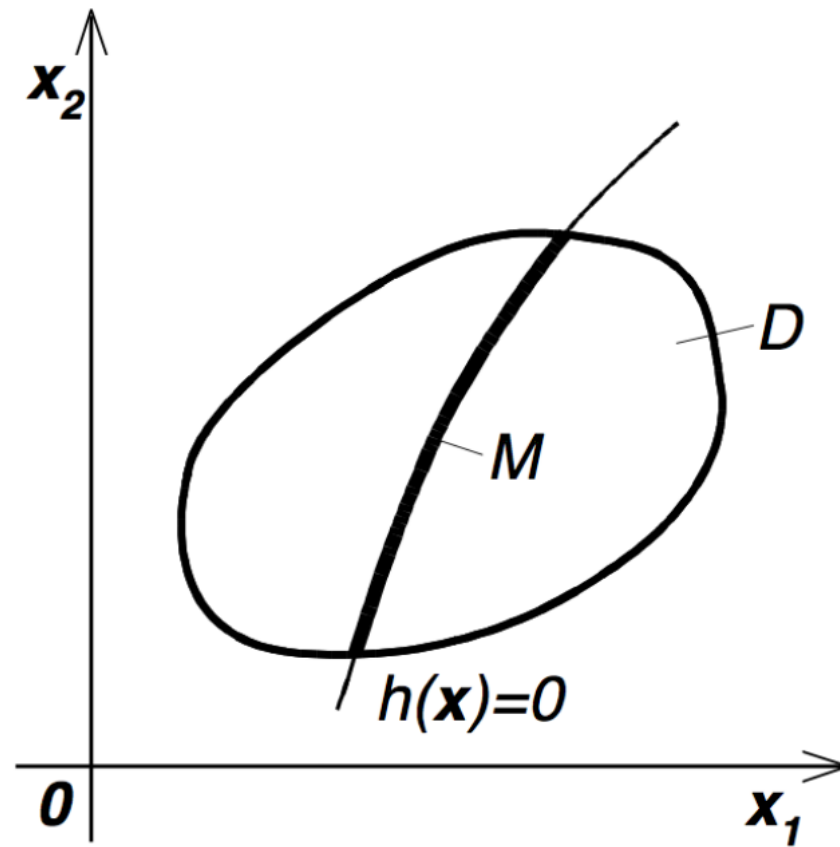
- $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$,
- $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m < n$,
- Gesucht sind dann Extremalstellen der Einschränkung $f|_M$ von f auf

$$M := \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\} \subset D.$$

- Für $m < n$ ist $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ ein unterbestimmtes Gleichungssystem. M wird i.A. eine Mannigfaltigkeit mit $(n - m)$ freien Parametern sein.
- Wäre $n \leq m$ bestünde M i.A. nur aus einem Punkt oder wäre leer, also wäre eine Extremalwertsuche sinnlos.



Beispiel: (Graphisch)
Menge $M = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ für $n=2, m=1$.



Beispiel: (Graphisch)

Menge $M = \{\mathbf{x} \in D : \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$ für $n = 2, m = 1$.

Beispiele: (Praktisch/Anschaulich)

- Finde maximale Leistung eines Motors innerhalb eines vorgegebenen Drehzahlbereiches.
- Finde kürzeste Strecke einer Logistik-Kette unter der Bedingung, dass eine bestimmte Anzahl Punkte versorgt werden.
- Finde energieeffizientesten Betriebszustand einer Verbrennung unter der Bedingung, dass eine vorgegebene Temperatur erreicht wird.

Definition: (Maximal-/Minimalstelle)

Wie schon zuvor definieren wir: Eine lokale **Maximalstelle** \mathbf{x}_0 von $f|_M$ ist ein Punkt in M , zu dem eine Umgebung $U \subset D$ existiert, so dass

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in U \cap D.$$

Analog ist eine **Minimalstelle** definiert.

Satz: (Notwendige Extremalbedingung bei m Nebenbedingungen)

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathbf{h} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig diff'bar auf offener Menge $D \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$, wobei die Jacobi-Matrix $\mathbf{h}'(\mathbf{x})$ für jedes $\mathbf{x} \in D$ den Rang m hat.

Ist dann $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle unter Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, so existiert dazu eine $(1 \times m)$ -Matrix $\mathbf{L} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ (Zeilenvektor) mit

$$f'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Lh}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Die reellen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen **Lagrange-Multiplikatoren**.

Bemerkungen:

- Der Satz formuliert *notwendige Bedingung*: Falls \mathbf{x}_0 Extremum von f unter Nebenbedingung $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ist, so erfüllt \mathbf{x}_0 die Gleichung

$$F'(\mathbf{x}_0) + \mathbf{Lh}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

- Frage: Können wir Extremalstellen durch Lösung der Gleichung erhalten?

Idee: Mit den folgenden Vereinbarungen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_m \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{L} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$

Schreibt man

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m.$$

Also gibt es $n + m$ Gleichungen für $n + m$ Unbekannte $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Die Lösungen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top$ heißen **stationäre** oder **kritische Punkte** und sie sind die Kandidaten für Extremalstellen.

Satz: (Notwendige Extremalbedingung bei einer Nebenbedingung)

Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell diff'bar auf offener Menge $D \subset \mathbb{R}^n$.

Es gelte $\nabla g(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ für jedes $\mathbf{x} \in D$.

Ist dann $\mathbf{x}_0 \in D$ eine lokale Extremalstelle von f unter der Nebenbedingung $g(\mathbf{x}) = 0$, so gilt

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-Multiplikator.

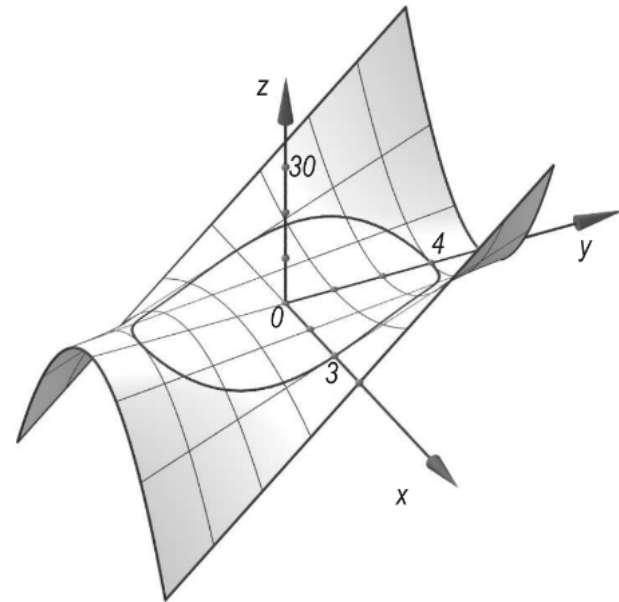
Beispiel:

Betrachte

$$f(x, y) = x^2 y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Gesucht sind Extremalstellen unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0.$$



1

Alternative: (Lagrange-Form)

Statt zwei Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial h_k}{\partial x_j} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

und

$$h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

zu lösen, ist es auch möglich, die **Lagrange-Form** für $n+m$ Veränderliche $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ zu formulieren:

$$L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k h_k(\mathbf{x}).$$

Dann ermittelt man die stationären Punkte durch Lösen von

$$\nabla L(\mathbf{x}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \mathbf{0}.$$

Ausgleichsrechnung

Motivation: Gesucht ist ein funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Gegeben ist aber nicht f , sondern eine Reihe von *Messungen*

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1_1} & x_{1_2} & \dots & x_{1_n} \\ x_{2_1} & x_{2_2} & \dots & x_{2_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m_1} & x_{m_2} & \dots & x_{m_n} \end{pmatrix} =: (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$

Ansatz: (lineare Theorie)

Vorabinformation über die gesuchte Funktion ist wahrscheinlich. Nimm linearen Zusammenhang an:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$$

Methode: (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

Ziel: Finde r_0, \dots, r_m , die den **quadratischen Fehler** zwischen den gemessenen y_k und der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ minimieren:

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_m) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n}))^2 \end{aligned}$$

Die Aufgabe lautet also (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

$$F(r_0, r_1, \dots, r_m) = \min!$$

Satz: (lineares Ausgleichsproblem)

1. Das lineare Ausgleichsproblem $F(r_0, \dots, r_m) = \min!$ ist immer lösbar.
2. Die Lösungen des Ausgleichsproblems und des zugehörigen Gleichungssystems $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$ stimmen überein.
3. Ist der Rang der Matrix $(1 \ x_1 \ \dots \ x_n)$ gleich $n+1$, so ist die Ausgleichslösung eindeutig.
4. Falls $m \leq n$ (weniger Messungen als Parameter), so ist A singulär.

Lösungsidee:

Das Minimierungsproblem ist ein *Extremalproblem ohne Nebenbedingung!* Also löse

$$\nabla F = 0$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r_0} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n})) \\ \frac{\partial F}{\partial r_1} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n})) x_{k_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial r_n} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n})) x_{k_n} \end{aligned}$$

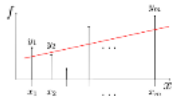
Wird diese Gleichung in Matrixschreibweise $\nabla F = 0$ geschrieben, so ergibt sich

$$2 \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \dots & \sum_{k=1}^m x_{k_n} \\ \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \sum_{k=1}^m x_{k_1}^2 & \dots & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_{k_n} & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} & \dots & \sum_{k=1}^m x_{k_n}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m y_k \\ \sum_{k=1}^m y_k x_{k_1} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^m y_k x_{k_n} \end{bmatrix}$$

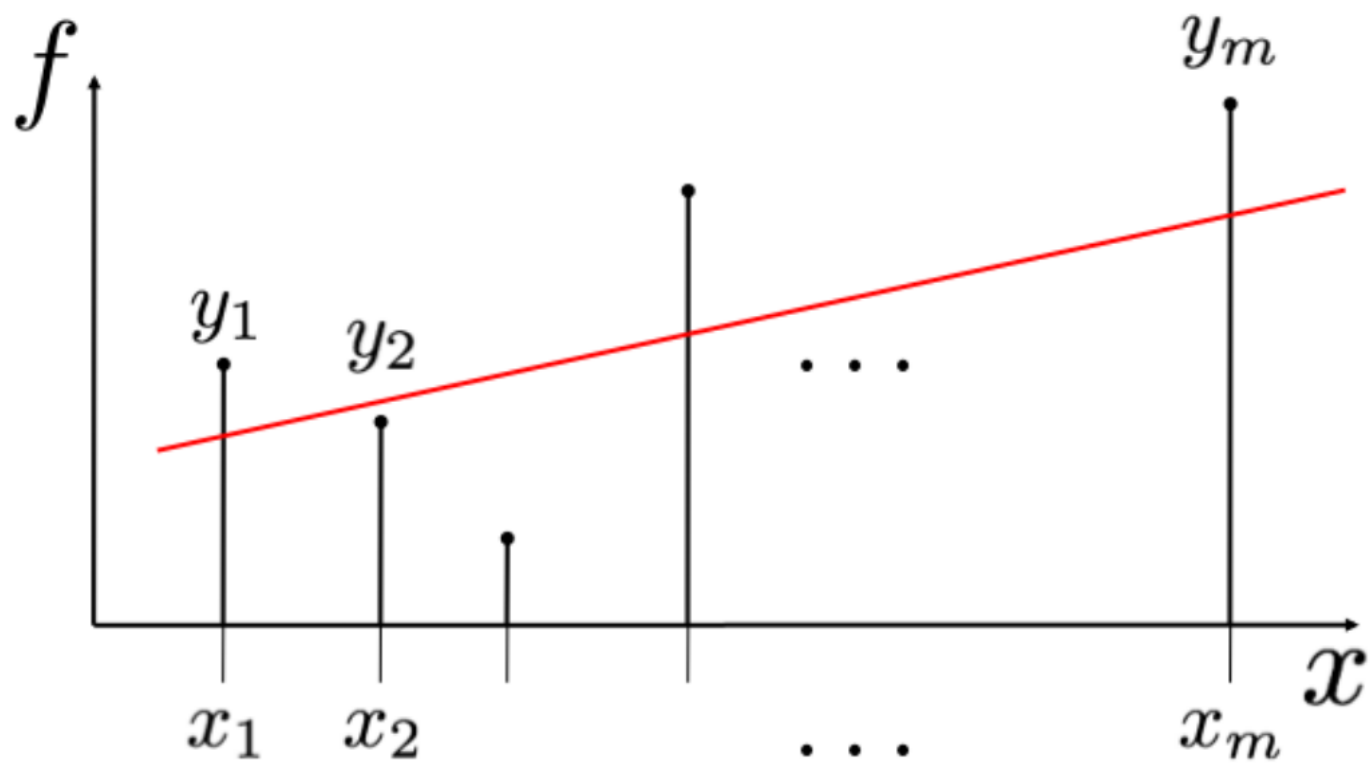
Motivation: Gesucht ist ein funktionaler Zusammenhang

$$y = f(x_1, \dots, x_n).$$

Gegeben ist aber nicht f , sondern eine Reihe von *Messungen*



$$\begin{pmatrix} y_1 & x_{1_1} & \cdots & x_{1_n} \\ y_2 & x_{2_1} & \cdots & x_{2_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ y_m & x_{m_1} & \cdots & x_{m_n} \end{pmatrix} =: (\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$$



Ansatz: (lineare Theorie)

Vorabinformation über die gesuchte Funktion ist wahrscheinlich.

Nimm linearen Zusammenhang an:

$$f(x_1, \dots, x_n) = r_0 + r_1 x_1 + \dots + r_n x_n$$

Methode: (Methode der kleinsten Fehlerquadrate)

Ziel: Finde r_0, \dots, r_m , die den **quadratischen Fehler** zwischen den gemessenen y_k und der Funktion $f(x_1, \dots, x_n)$ minimieren:

$$\begin{aligned} F(r_0, r_1, \dots, r_m) &= \sum_{k=1}^m (y_k - f(x_{k_1}, \dots, x_{k_n}))^2 \\ &= \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \dots + r_n x_{k_n}))^2 \end{aligned}$$

Die Aufgabe lautet also (**Methode der kleinsten Fehlerquadrate**)

$$F(r_0, r_1, \dots, r_m) = \min!$$

Lösungsidee:

Das Minimierungsproblem ist ein *Extremalproblem ohne Nebenbedingung!* Also löse

$$\nabla F = \mathbf{0}$$

Dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r_0} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) \\ \frac{\partial F}{\partial r_1} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) x_{k_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial r_n} &= 2 \sum_{k=1}^m (y_k - (r_0 + r_1 x_{k_1} + \cdots + r_n x_{k_n})) x_{k_n}\end{aligned}$$

Nach Umformung erhält man

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}$$

Nach Umformung erhält man

$$A\mathbf{r} = \mathbf{b}$$

für $\mathbf{r} = (r_0, \dots, r_m)^\top$ mit $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^\top$ einem Vektor aus Beiträgen
 $b_i = \sum_{k=1}^m y_k x_{k_i}$ und

$$A = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m 1 & \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_n} \\ \sum_{k=1}^m x_{k_1} & \sum_{k=1}^m x_{k_1}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m x_{k_n} & \sum_{k=1}^m x_{k_1} x_{k_n} & \cdots & \sum_{k=1}^m x_{k_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Satz: (lineares Ausgleichsproblem)

1. Das lineare Ausgleichsproblem $F(r_0, \dots, r_m) = \min!$ ist immer lösbar.
2. Die Lösungen des Ausgleichsproblems und des zugehörigen Gleichungssystems $A\mathbf{r} = \mathbf{b}$ stimmen überein.
3. Ist der Rang der Matrix $(\mathbf{1} \ \mathbf{x}_1 \ \dots \ \mathbf{x}_n)$ gleich $n + 1$, so ist die Ausgleichslösung eindeutig.
4. Falls $m \leq n$ (weniger Messungen als Parameter), so ist A singulär.

Extremalaufgaben (mit Nebenbedingungen)

Beispiel: Ein Unternehmen stellt zwei Produkte A und B her. Die Produktion von Produkt A benötigt 2 Stunden in der Abteilung 1 und 3 Stunden in der Abteilung 2. Die Produktion von Produkt B benötigt 3 Stunden in der Abteilung 1 und 2 Stunden in der Abteilung 2. In der Abteilung 1 sind maximal 120 Stunden und in der Abteilung 2 maximal 180 Stunden zur Verfügung. Die Erlöse betragen 40 € für Produkt A und 30 € für Produkt B. Wie viele Einheiten von Produkt A und B sollten produziert werden, um den Erlös zu maximieren?

Mathematisches Modell:

$$\text{Maximiere } Z = 40x + 30y$$

$$\text{unter der Bedingung } 2x + 3y \leq 120$$

$$3x + 2y \leq 180$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Lösung: Die Zielfunktion ist eine Gerade mit der Steigung $-\frac{4}{3}$. Die Nebenbedingungen sind zwei Geraden mit den Steigungen $-\frac{2}{3}$ und $-\frac{3}{2}$. Die optimale Lösung liegt im Schnittpunkt der beiden Nebenbedingungen bei $x = 24$ und $y = 36$. Der maximale Erlös beträgt $Z = 40 \cdot 24 + 30 \cdot 36 = 1920$ €.

Ausgleichsrechnung

Beispiel: Ein Unternehmen stellt zwei Produkte A und B her. Die Produktion von Produkt A benötigt 2 Stunden in der Abteilung 1 und 3 Stunden in der Abteilung 2. Die Produktion von Produkt B benötigt 3 Stunden in der Abteilung 1 und 2 Stunden in der Abteilung 2. In der Abteilung 1 sind maximal 120 Stunden und in der Abteilung 2 maximal 180 Stunden zur Verfügung. Die Erlöse betragen 40 € für Produkt A und 30 € für Produkt B. Wie viele Einheiten von Produkt A und B sollten produziert werden, um den Erlös zu maximieren?

Mathematisches Modell:

$$\text{Maximiere } Z = 40x + 30y$$

$$\text{unter der Bedingung } 2x + 3y \leq 120$$

$$3x + 2y \leq 180$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Lösung: Die Zielfunktion ist eine Gerade mit der Steigung $-\frac{4}{3}$. Die Nebenbedingungen sind zwei Geraden mit den Steigungen $-\frac{2}{3}$ und $-\frac{3}{2}$. Die optimale Lösung liegt im Schnittpunkt der beiden Nebenbedingungen bei $x = 24$ und $y = 36$. Der maximale Erlös beträgt $Z = 40 \cdot 24 + 30 \cdot 36 = 1920$ €.

Analysis III



Chair for Applied Mathematics
University of Bayreuth

Erinnerung: Extremalaufgaben (ohne Nebenbedingungen)

Beispiel: Ein Unternehmen stellt zwei Produkte A und B her. Die Produktion von Produkt A benötigt 2 Stunden in der Abteilung 1 und 3 Stunden in der Abteilung 2. Die Produktion von Produkt B benötigt 3 Stunden in der Abteilung 1 und 2 Stunden in der Abteilung 2. In der Abteilung 1 sind maximal 120 Stunden und in der Abteilung 2 maximal 180 Stunden zur Verfügung. Die Erlöse betragen 40 € für Produkt A und 30 € für Produkt B. Wie viele Einheiten von Produkt A und B sollten produziert werden, um den Erlös zu maximieren?

Mathematisches Modell:

$$\text{Maximiere } Z = 40x + 30y$$

$$\text{unter der Bedingung } 2x + 3y \leq 120$$

$$3x + 2y \leq 180$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

Lösung: Die Zielfunktion ist eine Gerade mit der Steigung $-\frac{4}{3}$. Die Nebenbedingungen sind zwei Geraden mit den Steigungen $-\frac{2}{3}$ und $-\frac{3}{2}$. Die optimale Lösung liegt im Schnittpunkt der beiden Nebenbedingungen bei $x = 24$ und $y = 36$. Der maximale Erlös beträgt $Z = 40 \cdot 24 + 30 \cdot 36 = 1920$ €.