

Analysis III

Winter 2017/2018



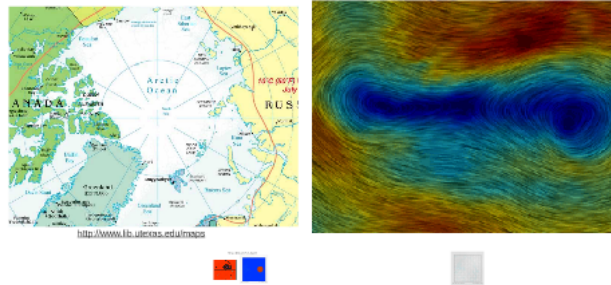
Einführung in Vektoranalysis

Buch Kapitel 7.1-7.3

Motivation

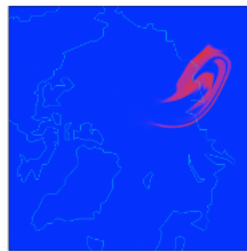
Ozonabbau in der Arktis

Gegeben: Wind Feld (Arctische Stratosphere ca. 18 km Höhe)

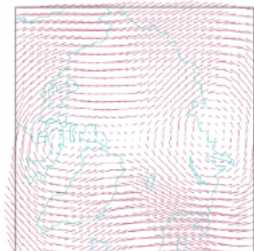


Notation: (Vektorfeld/Skalarfeld)

Im folgenden bezeichne $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_1$ reellwertige Abbildung, ein **Skalarfeld**.
Eine vektorwertige Abbildung $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird **Vektorfeld** genannt.



Skalarfeld



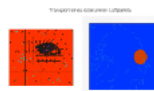
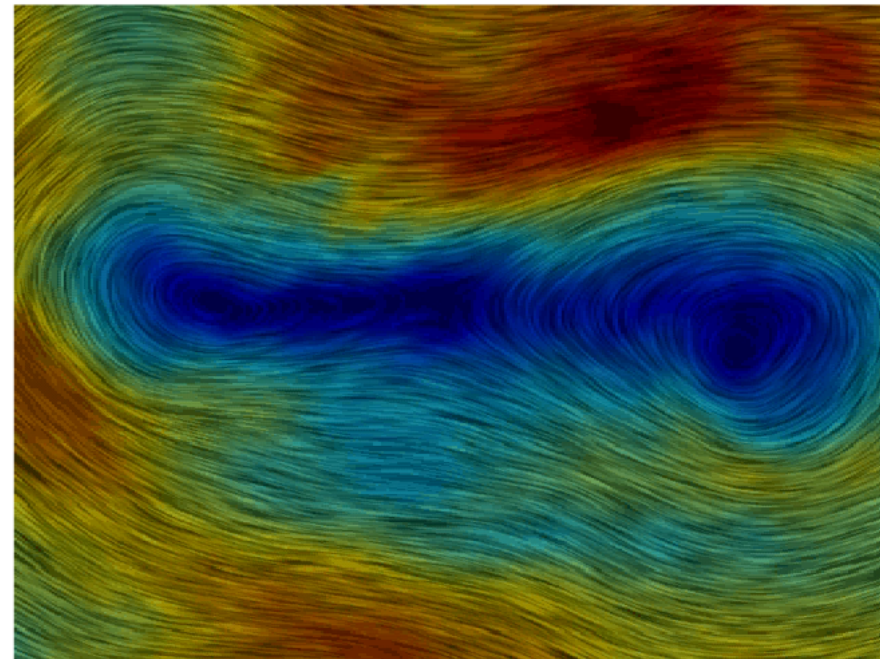
Vektorfeld

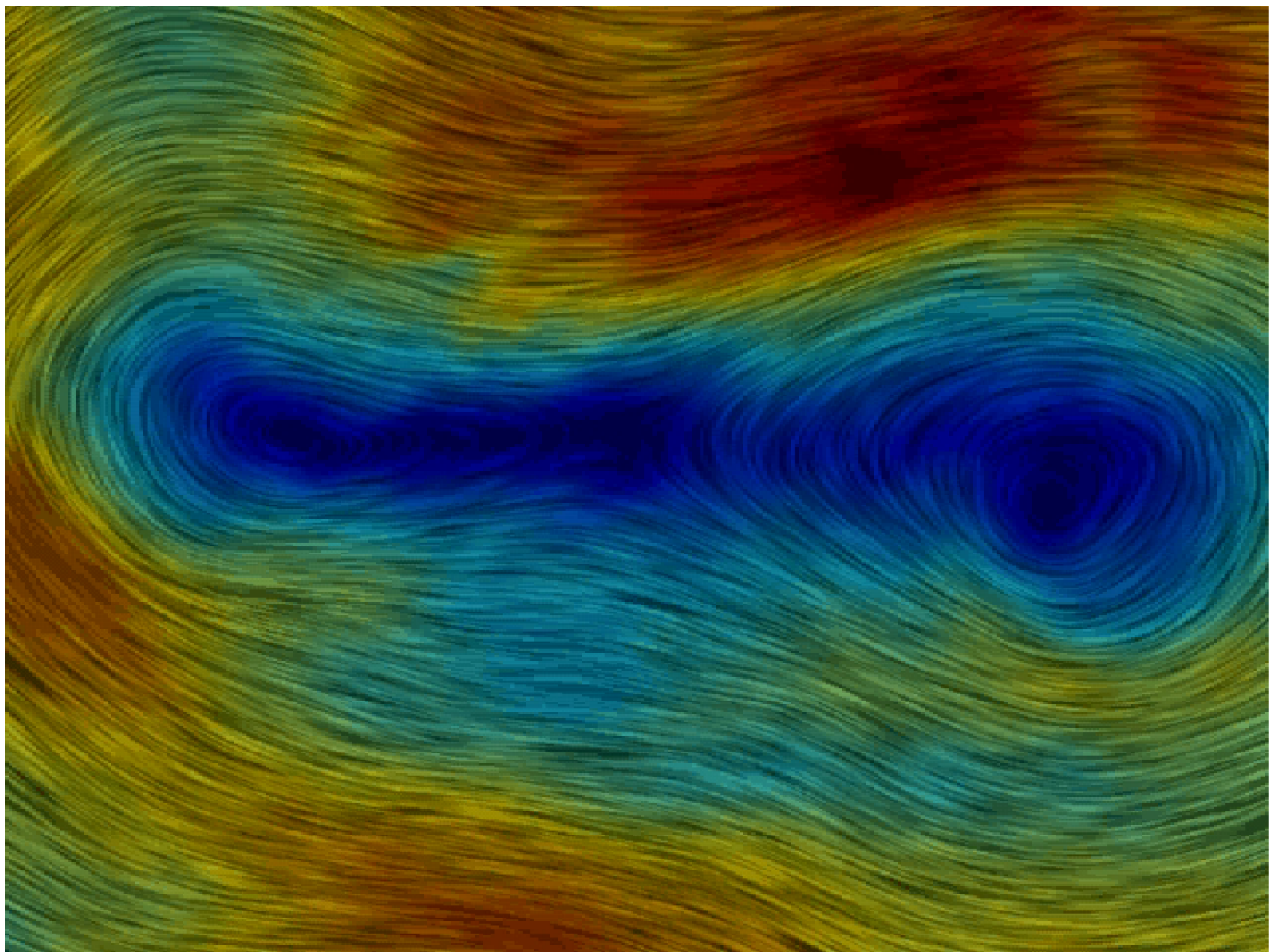
Ozonabbau in der Arktis

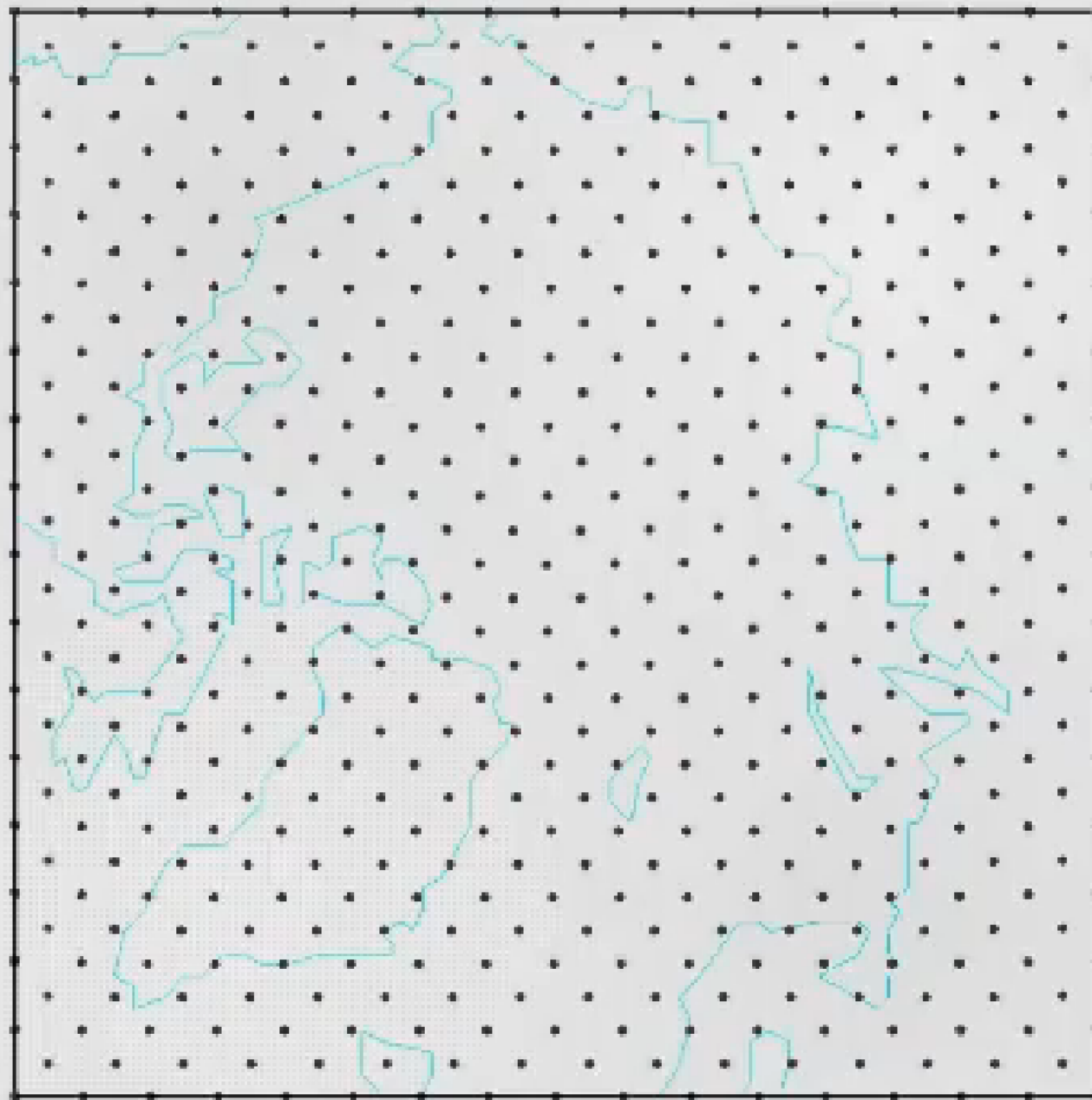
Gegeben: Wind Feld (Arctische Stratosphäre ca. 18 km Höhe)



<http://www.lib.utexas.edu/maps>



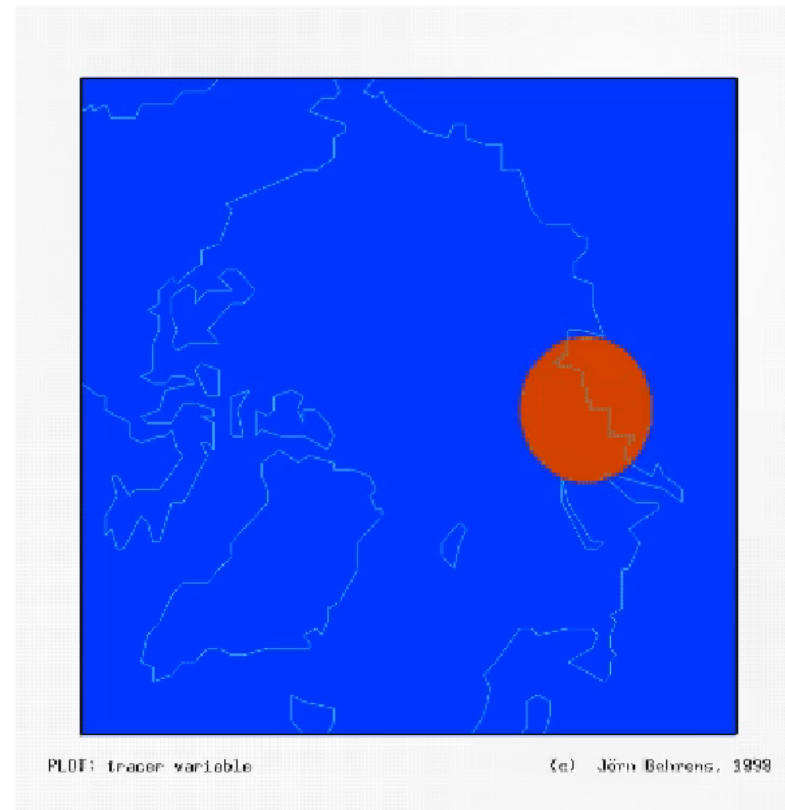
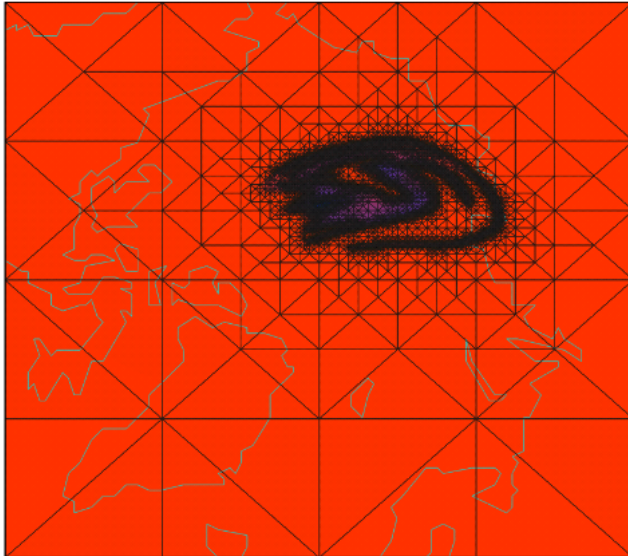


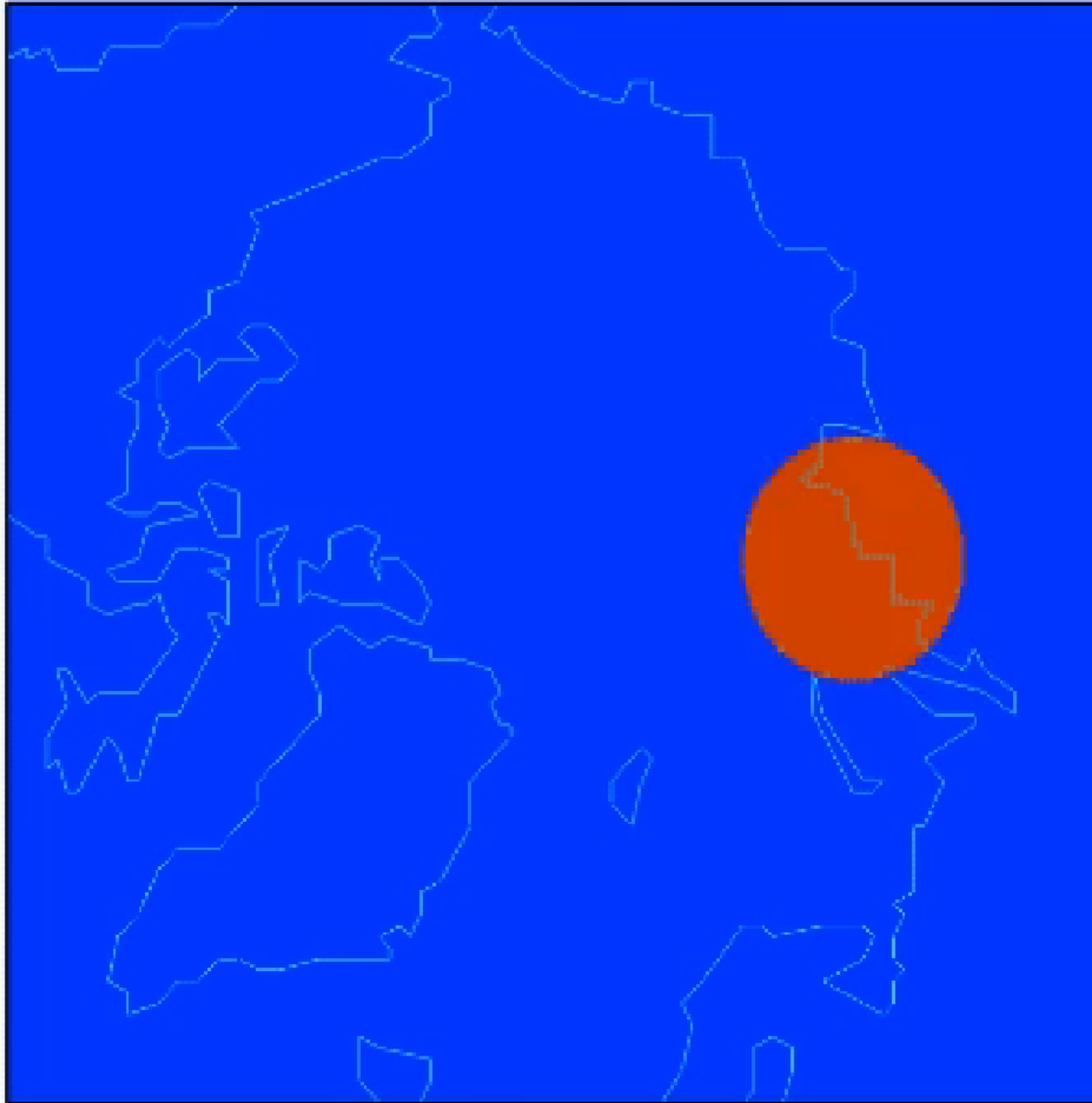


PLOT: semi-Lagr. trajectories

(c) Joern Behrens, 1998

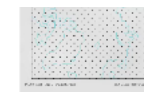
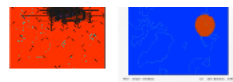
Transport eines ozonarmen Luftpakets





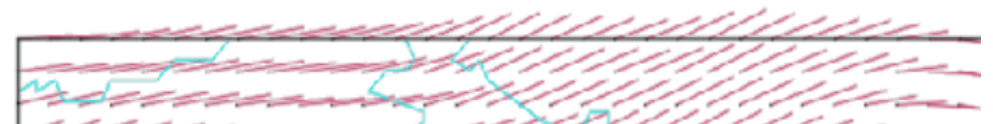
PLDF: tracer variable

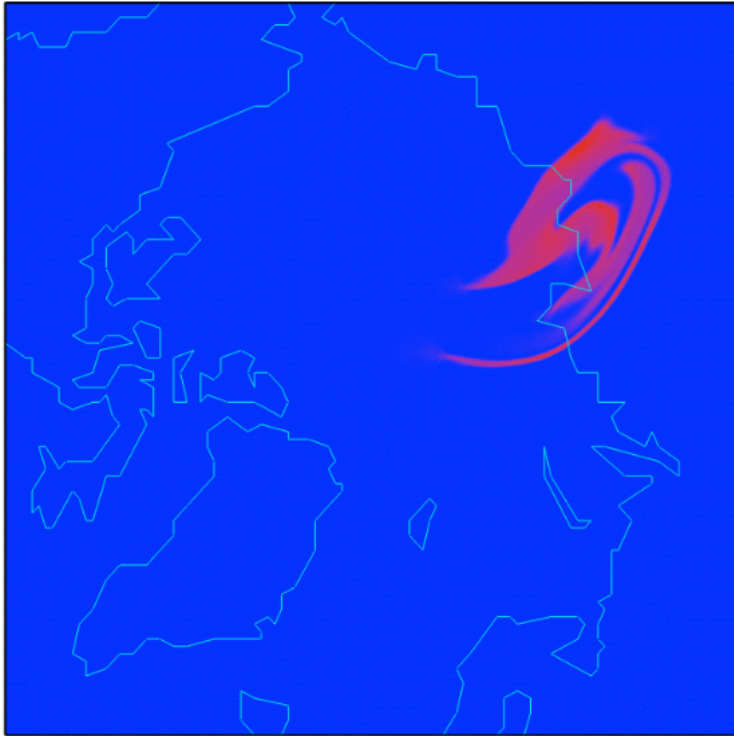
(c) Jörn Behrens, 1998



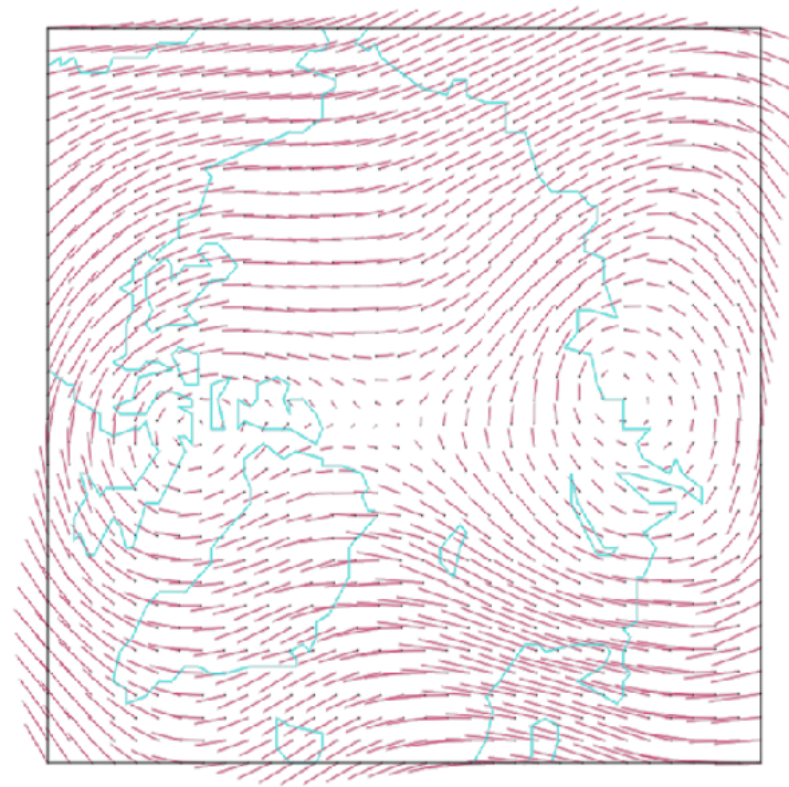
Notation: (Vektorfeld/Skalarfeld)

Im folgenden bezeichne $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, reellwertige Abbildung, ein **Skalarfeld**.
Eine vektorwertige Abbildung $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird **Vektorfeld** genannt.





Skalarfeld



Vektorfeld

Begriffe und Definitionen

Vorbemerkungen:

- Betrachte im Folgenden Skalarfelder ϕ und Vektorfelder v .
- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene zusammenhängende Menge.
- \mathbb{R}^n bezeichne die kartesischen Koordinaten.
- Annahme: die angegebenen partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.

Notationen: (Anwendung auf Vektorfelder)

Die Operatoren grad und Δ waren für Skalarfelder ϕ definiert. Jetzt vereinbare für w ein zweimal stetig partiell diff'bares und v stetig partiell diff'bares Vektorfeld:

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta w = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix}$$

- Anwendung des Operators $w \cdot \nabla$:

$$(w \cdot \nabla)v = \begin{pmatrix} (w \cdot \nabla)v_1 \\ \vdots \\ (w \cdot \nabla)v_n \end{pmatrix}$$

1

Beispiel: $\Delta \phi$ und $w \cdot \nabla$

• Sei $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarfeld in zwei Variablen:

$$\phi(x, y) = x^2 + y^2 + \sin(x) + \cos(y)$$

• Sei $w: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld in zwei Variablen:

$$w(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

• Berechne $\Delta \phi$ und $w \cdot \nabla \phi$ für ϕ und w in D .

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 2 + (-1) = 1$$

$$w \cdot \nabla \phi = (x^2 - y^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} + 2xy \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x(x^2 - y^2) + 2xy(2y) = 2x^3 - 2xy^2 + 4xy^2 = 2x^3 + 2xy^2$$

• Berechne $\text{div} v$ für $v: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld in zwei Variablen:

$$v(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$$

$$\text{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 2x + (-2y) = 2(x - y)$$

• Berechne $\text{rot} v$ für $v: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld in zwei Variablen:

$$\text{rot} v = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = 2x - 2y = 2(x - y)$$

• Berechne $\text{rot} v$ für $v: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld in drei Variablen:

$$v(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x^2 - y^2, x^2 - y^2)$$

$$\text{rot} v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_3}{\partial z} \\ \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 2y \\ 2x - 2z \\ 2y - 2x \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix}$$

Definition: (Rotation)

Sei $v: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig partiell diff'bares Vektorfeld. Der Operator rot , definiert durch

$$\text{rot} v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

genannt **Rotation** des dreidimensionalen Vektorfeldes v , ordnet dem Vektorfeld v das Vektorfeld $\text{rot} v: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu.

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)

Sei $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad , definiert durch

$$\text{grad} \phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\text{grad} \phi: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\text{grad} \phi$ heißt **Gradient** von ϕ .

Definition: (Laplace Operator)

Sei $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Der **Laplace Operator** Δ , definiert durch

$$\Delta \phi := \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

ordnet dem Skalarfeld ϕ das Skalarfeld $\Delta \phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Divergenz)

Sei $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld. Der Operator div , definiert durch

$$\text{div} v := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

genannt **Divergenz** von v , ordnet dem Vektorfeld v das Skalarfeld $\text{div} v: D \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

Vorbemerkungen:

- Betrachte im Folgenden Skalarfelder ϕ und Vektorfelder \mathbf{v} .
- Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offene zusammenhängende Menge.
- \mathbb{R}^n bezeichne die kartesischen Koordinaten.
- Annahme: die angegebenen partiellen Ableitungen existieren und sind stetig.

Definition: (Gradient des Skalarfeldes)

Sei $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Dann ordnet der Operator grad, definiert durch

$$\text{grad}\phi := \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dem Skalarfeld ϕ das Vektorfeld $\text{grad}\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu. Der Vektor $\text{grad}\phi$ heißt **Gradient** von ϕ .

Definition: (Laplace-Operator)

Sei $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld.

Der **Laplace-Operator** Δ , definiert durch

$$\Delta\phi := \frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_n^2}$$

ordnet dem Skalarfeld ϕ das Skalarfeld $\Delta\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ zu.

Definition: (Divergenz)

Sei $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.

Der Operator div , definiert durch

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n},$$

genannt **Divergenz** von \mathbf{v} , ordnet dem Vektorfeld \mathbf{v} das Skalarfeld $\operatorname{div} \mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}$ zu.



Definition: (Rotation)

Sei $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, stetig partiell diff'bares Vektorfeld.

Der Operator rot , definiert durch

$$\text{rot}\mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

genannt **Rotation** des dreidimensionalen Vektorfeldes \mathbf{v} , ordnet dem Vektorfeld \mathbf{v} das Vektorfeld $\text{rot}\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ zu.

Bemerkungen: (∇ -Operator)

- Wir können den **Nabla-Operator** ∇ als symbolischen Vektor auffassen:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^\top = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

- Symbolische Multiplikation von ∇ mit ϕ ergibt

$$\nabla \phi = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \phi = \text{grad} \phi.$$

- Die (symbolische) Skalarmultiplikation des Vektors ∇ mit einem Vektorfeld \mathbf{v} führt auf

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n) \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \right) = \text{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

- Schließlich führt das (symbolische) Kreuzprodukt von ∇ mit einem Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ auf

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \end{pmatrix} = \text{rot} \mathbf{v}.$$

- Alternativ gilt:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} &= \mathbf{e}_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} v_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} v_2 \right) + \mathbf{e}_2 \left(\frac{\partial}{\partial x_3} v_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} v_3 \right) + \mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} v_1 \right) \\ &= \text{rot} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Notationen: (Anwendung auf Vektorfelder)

Die Operatoren grad und Δ waren für Skalarfelder ϕ definiert. Jetzt vereinbare für \mathbf{w} ein zweimal stetig partiell diff'bares und \mathbf{v} stetig partiell diff'bares Vektorfeld:

- Anwendung des Laplace-Operators:

$$\Delta \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \Delta w_1 \\ \vdots \\ \Delta w_n \end{pmatrix}$$

- Anwendung des Operators $\mathbf{w} \cdot \nabla$:

$$(\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_1 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla) v_n \end{pmatrix}$$



Rechenregeln

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $v = \text{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix J_v bilden:

$$J_v(\mathbf{x}) = J_{\text{grad}\phi(\mathbf{x})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $v = \text{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ .

- Verwende den Begriff der **Spur** der Matrix A : $\text{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt:

$$\Delta\phi = \text{Spur}(J_{\text{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:

Sei $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $v: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (falls nur verwendet wird, nehmen wir $n=3$ an). Dann gelten $c \in \mathbb{R}$ Regeln:

- $\text{rot}(\text{grad}\phi) = 0$ (Satz von Schwarz)
- $\text{div}(c \cdot v) = c \cdot \text{div}v$
- $\text{div}(\text{grad}\phi) = \Delta\phi$
- $\text{div}(\phi v) = \text{grad}\phi \cdot v + \phi \text{div}v$
- $\text{rot}(\phi v) = \text{grad}\phi \times v + \phi \text{rot}v$
- $\text{rot}(c \cdot v) = c \cdot \text{rot}v$

Vereinfachung der Schreibweise

Beispiel: Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\text{grad}p - \text{div}(\nu \text{grad}v), \quad \text{div}v = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial v_i}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \\ \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) \\ \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} \right) \end{aligned}$$

Vorbemerkungen:

- Falls $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \in \mathbf{R}^3$, zweimal stetig partiell diff'bares Skalarfeld. Sei $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$ ein Vektorfeld. Dann kann man die Jacobi-Matrix $J_{\mathbf{v}}$ bilden:

$$J_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = J_{\text{grad}\phi}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Beobachtung: Die Jacobi-Matrix von $\mathbf{v} = \text{grad}\phi$ ist gleich der Hesse-Matrix von ϕ .

- Verwende den Begriff der **Spur** der Matrix A : $\text{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + a_{33}$. Dann gilt

$$\Delta\phi = \text{Spur}(J_{\text{grad}\phi}(\mathbf{x}))$$

Rechenregeln:

Sei $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^n$, ein zweimal stetig diff'bares Skalarfeld und $\mathbf{v} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zweimal stetig diff'bares Vektorfeld (Falls rot verwendet wird, nehmen wir $n = 3$ an). Dann gelten die Regeln

1. $\text{rot}(\text{grad}\phi) = \mathbf{0}$ (Satz von Schwarz)
2. $\text{div}(\text{rot}\mathbf{v}) = 0$
3. $\text{div}(\text{grad}\phi) = \Delta\phi$
4. $\text{div}(\phi\mathbf{v}) = \text{grad} \cdot \mathbf{v} + \phi\text{div}\mathbf{v}$
5. $\text{rot}(\phi\mathbf{v}) = \text{grad}\phi \times \mathbf{v} + \phi(\text{rot}\mathbf{v})$
6. $\text{rot}(\text{rot}\mathbf{v}) = \text{grad}(\text{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

Vereinfachung der Schreibweise

Beispiel: Navier-Stokes Gleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } p + \text{div} (\nu \text{grad } \mathbf{v}), \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_1}{\partial x_3} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_2}{\partial x_3} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_3}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

Begriffe und Definitionen

Definition 1.1 (Erweiterte reelle Zahlensysteme)

Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert:

Definition 1.2 (Erweiterte reelle Zahlensysteme)

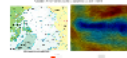
Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert:

Definition 1.3 (Erweiterte reelle Zahlensysteme)

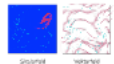
Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert:

Analysis III

Motivation



© 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025



© 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025

Rechenregeln

Definition 1.1 (Erweiterte reelle Zahlensysteme)

Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert:

Definition 1.2 (Erweiterte reelle Zahlensysteme)

Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert:

Veranschaulichung der Notation

Die reellen Zahlen \mathbb{R} werden durch die Addition der Unendlichkeiten $+\infty$ und $-\infty$ erweitert. Die erweiterten reellen Zahlen $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind durch die folgenden Operationen definiert: