Analysis III

Winter 2017/2018

Jörn Behrens
mit
Kai Rothe

Satz von Green und Transformationsformel

Buch Kapitel 8.4-8.5

Erinnerung

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \setminus N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subseteq N$, dann gilt $F(M) \leq F(N)$ (Monotonie).
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität).

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das Innere von B (also B°) ein Gebiet ist,
3. der Rand [illegible]

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.
- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \; dF = \int_B f(x, y) \; dF = \int_B f(x, y) \; dxdy := I.$$

Definition: (Normalbereiche)

- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 1, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(x) \leq h(x) \; \forall x \in [a, b], \; \text{ und } \quad B_1 = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 2, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c, d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g, h : [c, d] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(y) \leq h(y) \; \forall y \in [c, d], \; \text{ und } \quad B_2 = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$

Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x, y)^\top : x \in [a, b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \; dydx.$$

2. Sei $B = \{(x, y)^\top : y \in [c, d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \; dxdy.$$

Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei B ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $B = \bigcup_{j=1}^k B_j$ von Normalbereichen B_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $F(B_i \cap B_j) = 0$). Dann gilt für $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_B f \; dF = \sum_{j=1}^k \int_{B_j} f \; dF.$$

Satz: (Eigenschaften von messbaren Mengen und Jordan-Inhalt)

1. Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
2. Die beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ ist genau dann messbar, wenn der Rand ∂M von M messbar ist und $F(\partial M) = 0$ gilt.
3. Jedes reguläre Kurvenstück im $\mathbb{R}^2$ ist eine Nullmenge.
4. Durchschnitt und Vereinigung zweier messbarer Mengen sind wieder messbar.
5. Wenn M und N messbar sind, dann auch $M \backslash N$.
6. Wenn M und N messbar sind und $M \subset N$, dann gilt $F(M) \leq F(N)$ (Monotonie).
7. Wenn M und N messbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) = F(M) + F(N)$ (Additivität).

Definition: (Regulärer Bereich)
Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt regulärer Bereich, wenn

1. B abgeschlossen ist,
2. das innere von B (also $B \backslash \partial B$) ein Gebiet ist,
3. der Rand ∂B von B aus endlich vielen regulären Kurvenstücken besteht.

essbar sind und $M \cap N = \emptyset$, dann gilt $F(M \cup N) =$
ditivität).

Definition: (Riemannsches Flächenintegral)

- Sei f auf einem regulären Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ definiert und beschränkt. Dann heißt f über B im Riemannschen Sinn integrierbar, wenn die Folge der Riemannschen Zwischensummen $(S(f, Z_k))$ für jede zulässige Folge von Zerlegungen $((Z_k))$ und jede Wahl der Zwischenpunkte $\mathbf{x}_j$ gegen denselben Grenzwert I konvergiert.

- Der Grenzwert I heißt Riemnannsches Flächenintegral der Funktion f über dem Bereich B und man schreibt:

$$\int_B f \; dF = \int_B f(x, y) \; dF = \int_B f(x, y) \; dxdy := I.$$

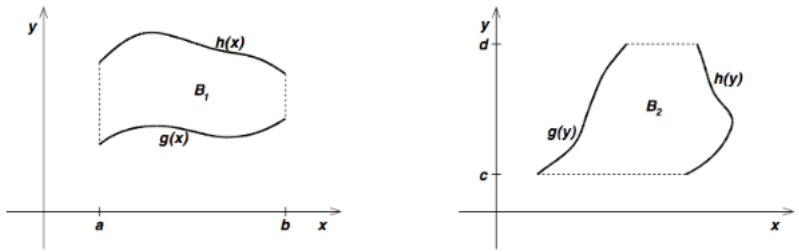
Definition: (Normalbereiche)

- Ein Bereich $B_1 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 1, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[a,b]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(x) \leq h(x) \ \forall x \in [a,b], \text{ und } \quad B_1 = \{(x,y)^\top : x \in [a,b], g(x) \leq y \leq h(x)\}.$$

- Ein Bereich $B_2 \subset \mathbb{R}^2$ heißt Normalbereich vom Typ 2, wenn es ein abgeschlossenes Intervall $[c,d]$ und zwei stetig diff'bare Funktionen $g,h : [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$g(y) \leq h(y) \ \forall y \in [c,d], \text{ und } \quad B_2 = \{(x,y)^\top : y \in [c,d], g(y) \leq x \leq h(y)\}.$$



Corollar: (Flächenintegral über Vereir

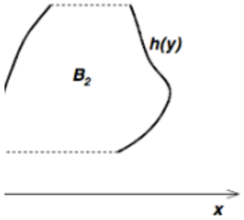
Satz: (Flächenintegral über Normalbereich)

1. Sei $B = \{(x,y)^\top : x \in [a,b], g(x) \leq y \leq h(x)\}$ ein Normalbereich vom Typ 1 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) \; dydx.$$

2. Sei $B = \{(x,y)^\top : y \in [c,d], g(y) \leq x \leq h(y)\}$ ein Normalbereich vom Typ 2 und $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion ist, so gilt:

$$\int_B f \; dF = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y) \; dxdy.$$



Corollar: (Flächenintegral über Vereinigung von Normalbereichen)
Sei B ein Bereich, der sich als endliche Vereinigung $B = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$ von Normalbereichen B_j des Typs 1 oder 2 darstellen lässt (für $i \neq j$ gelte $F(B_i \cap B_j) = 0$). Dann gilt für $f : B \to \mathbb{R}$ stetige (beschränkte) Funktion:

$$\int_B f \; dF = \sum_{j=1}^{k} \int_{B_j} f \; dF.$$

Kurven- und Flächenintegrale

Ziel: Zusammenhang zwischen

- Flächenintegral über Bereich
- Kurvenintegral über Randkurve des Bereiches

Definition: (Orientierung)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit dem Rand ∂B, der aus endlich vielen Geschlossenen Kurven $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ bestehe. Die Kurven seien parametrisiert, so dass für jede von ihnen eine Durchlaufrichtung definiert ist.
Dann heißt ∂B positiv orientiert, wenn beim Durchlaufen jeder einzelnen Randkurve γ_j $(j = 1, \dots, k)$ der Bereich B zur Linken liegt.

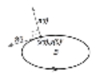
Satz: (Satz von Green)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand ∂B (bestehend aus endlich vielen geschlossenen Kurven). Sei weiter $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig diff'bares Vertorfeld.
Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} \right] dF.$$

Beobachtung:
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit geschlossener, positiv orientierter Randkurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, $t \in [t_a, t_e]$ auf ∂B.
Der nach außen gerichtete Normalenvektor $n(t)$ an ∂B ist gegeben durch

$$n(t) = \frac{1}{|\dot\gamma(t)|} \begin{pmatrix} \dot y(t) \\ -\dot x(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_a, t_e].$$

Damit ist $n(t) \times \dot\gamma = |\dot\gamma| e_3$, das heißt n, $\dot\gamma$ und e_3 bilden ein Rechtssystem.



Bemerkungen:

- **Beobachtung:** $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \operatorname{rot} v$ für $v = (v_1, v_2, 0)^T$ ebenes Vektorfeld!
- **Folgerung**: In einem einfach zusammenhängenden Gebiet D verschwindet das Arbeitsintegral eines rotationsfreien ebenen Vektorfeldes längs einer beliebigen in D verlaufenden geschlossenen Kurve.
- **D.h.** Aus der Rotationsfreiheit folgt die Wegunabhängigkeit (siehe Satz über Kurvenintegrale und Potentialfelder).
- **Aussage des Satzes**: Unter geringen Voraussetzungen kann ein Flächen- in ein Linienintegral umgewandelt werden (und umgekehrt).

Folgerung:
Mit den obigen Bezeichnungen und $u : D \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig diff'baren Funktion lässt sich v wie folgt wählen:

$$v = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u.$$

Mit dem Satz von Green folgt dann

$$\begin{aligned} \int_B \Delta u \, dF &= \int_{\partial B} v \cdot dx = \int_{t_a}^{t_e} v(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t) \, dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \operatorname{grad} u(\gamma(t)) \cdot n(t) |\dot\gamma(t)| \, dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{\partial u}{\partial n} |\dot\gamma(t)| \, dt \\ &= \oint_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} ds \end{aligned}$$

- Das Flächenintegral von Δu über B ist gleich dem Kurvenintegral von $\frac{\partial u}{\partial n}$ über den Rand ∂B.
- Falls u in D die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ erfüllt, verschwindet das Kurvenintegral.

Satz: (Flächeninhaltsformel)
Sei B ein Bereich, dessen Rand ∂B durch eine doppelpunktfreie geschlossene und positiv orientierte Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, gegeben ist.
Dann gilt für den Flächeninhalt $A(\gamma)$

$$A(\gamma) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_e} [-y(t)\dot x(t) + x(t)\dot y(t)] \, dt$$

Ziel: Zusammenhang zwischen

- Flächenintegral über Bereich
- Kurvenintegral über Randkurve des Bereiches

Definition: (Orientierung)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Bereich mit dem Rand ∂B, der aus endlich vielen Geschlossenen Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ bestehe. Die Kurven seien parametrisiert, so dass für jede von ihnen eine Durchlaufrichtung definiert ist.
Dann heißt ∂B positiv orientiert, wenn beim Durchlaufen jeder einzelnen Randkurve γ_j $(j = 1, \ldots, k)$ der Bereich B zur Linken liegt.

Satz: (Satz von Green)
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit positiv orientiertem Rand ∂B (bestehend aus endlich vielen geschlossenen Kurven). Sei weiter $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig diff'bares Vertorfeld.
Dann gilt:

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \left[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} \right] dF.$$

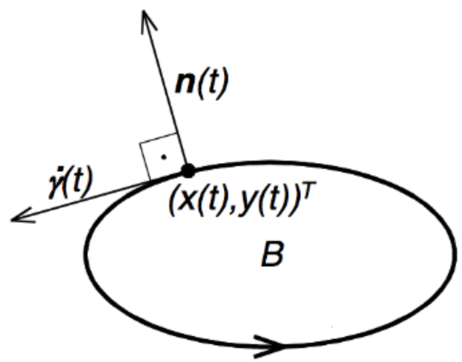
Bemerkungen:

- **Beobachtung**: $\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = \mathrm{rot}\mathrm{v}$ für $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 0)^\top$ ebenes Vektorfeld!
- **Folgerung**: In einem einfach zusammenhängenden Gebiet D verschwindet das Arbeitsintegral eines rotationsfreien ebenen Vertorfeldes längs einer beliebigen in D verlaufenden geschlossenen Kurve.
- **D.h.** Aus der Rotationsfreiheit folgt die Wegunabhängigkeit (siehe Satz über Kurvenintegrale und Potentialfelder).
- **Aussage des Satzes**: Unter geringen Voraussetzungen kann ein Flächen- in ein Linienintegral umgewandelt werden (und umgekehrt).

Beobachtung:
Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich mit geschlossener, positiv orientierter Randkurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [t_a, t_e]$ auf ∂B.
Der nach außen gerichtete Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ an ∂B ist gegeben durch

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(t)|} \begin{pmatrix} \dot{y}(t) \\ -\dot{x}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_a, t_e].$$

Damit ist $\mathbf{n}(t) \times \dot{\gamma} = |\dot{\gamma}|\mathbf{e}_3$, das heißt $\mathbf{n}$, $\dot{\gamma}$ und $\mathbf{e}_3$ bilden ein Rechtssystem.



Folgerung:

Folgerung:
Mit den obigen Bezeichnungen und $u : D \to \mathbb{R}$ einer zweimal stetig diff'baren Funktion lässt sich $\mathbf{v}$ wiefolgt bilden:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} = u_{xx} + u_{yy} = \Delta u.$$

Mit dem Satz von Green folgt dann

$$\begin{aligned} {\color{red}\int_B \Delta u \; dF} &= \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_{t_a}^{t_e} \mathbf{v}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \; dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \mathrm{grad} u(\gamma(t)) \cdot \mathbf{n}(t) |\dot{\gamma}(t)| \; dt \\ &= \int_{t_a}^{t_e} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t) |\dot{\gamma}(t)| \; dt \\ &= {\color{red}\oint_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(t) ds.} \end{aligned}$$

- Das Flächenintegral von Δu über B lässt sich umwandeln in das Kurvenintegral von $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ über dem Rand ∂B.
- Falls u in B die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ erfüllt, verschwindet das Kurvenintegral.

Satz: (Flächeninhaltsformel)
Sei B ein Bereich, dessen Rand ∂B durch eine doppelpunktfreie geschlossene und positiv orientierte Kurve $\gamma : [t_a, t_e] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))^\top$, gegeben ist.
Dann gilt für den Flächeninhalt $F(b)$:

$$F(B) = \frac{1}{2} \int_{t_a}^{t_e} [-y(t)\dot{x}(t) + x(t)\dot{y}(t)] \, dt.$$

Lehrevaluation

https ://checking.tuhh.de/ce/158025d2/de.html

Transformationsformel

Vorbemerkung:
Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hatten wir die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt}\ dt, \quad x = \phi(t),\ \phi \text{ injektiv}$$

kennen gelernt.

Ziel: Verallgemeinerung auf Doppelintegrale!

Definition: (Koordinatentransformation)
Seien $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ zwei Gebiete. Eine zweimal stetig diff'bare Funktion

$$\mathbf{x} : D \to D', \quad \mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatentransformation, wenn die Abbildung $\mathbf{x}$ injektiv ist und wenn für alle $(u,v)^\top \in D$ die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u,v)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Satz: (Transformationsregel für Flächenintegrale)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich und $\mathbf{x} : B \to B' \subset \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformation.
Dann gilt für jede auf B' stetige Funktion $f : B' \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbf{x}(B)} f\ dF = \int_{B'} f(x,y)\ dxdy = \int_B f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|\ dudv.$$

4

Vorbemerkung:
Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hatten wir die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \frac{d\phi(t)}{dt}\, dt, \quad x = \phi(t),\ \phi \text{ injektiv}$$

kennen gelernt.

Ziel: Verallgemeinerung auf Doppelintegrale!

Definition: (Koordinatentransformation)
Seien $D, D' \subset \mathbb{R}^2$ zwei Gebiete. Eine zweimal stetig diff'bare Funktion

$$\mathbf{x} : D \to D', \quad \mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

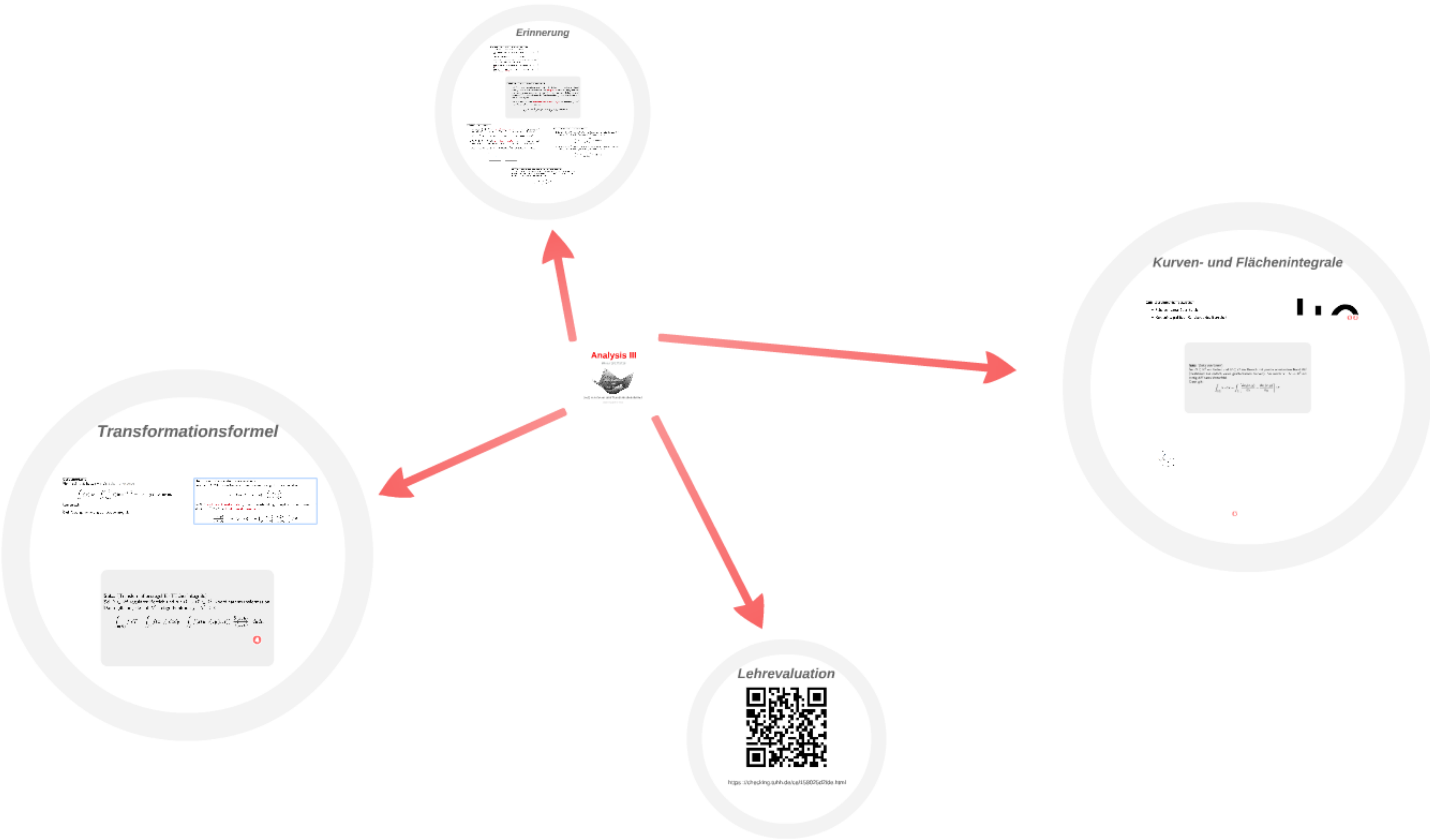
heißt Koordinatentransformation, wenn die Abbildung $\mathbf{x}$ injektiv ist und wenn für alle $(u,v)^\top \in D$ die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det(J_{\mathbf{x}}(u,v)) = \det \begin{pmatrix} x_u(u,v) & x_v(u,v) \\ y_u(u,v) & y_v(u,v) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Satz: (Transformationsregel für Flächenintegrale)
Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ regulärer Bereich und $\mathbf{x} : B \to B' \subset \mathbb{R}^2$ Koordinatentransformation.
Dann gilt für jede auf B' stetige Funktion $f : B' \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbf{x}(B)} f \; dF = \int_{B'} f(x,y) \; dxdy = \int_B f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \; dudv.$$

4


Erinnerung
Analysis III
Kurven- und Flächenintegrale
Transformationsformel
Lehrevaluation