ANALYSIS III

18.01.2018

J. Behrens

① Flächenberechnung:

- Ist S als Funktionsgraph gegeben:

$$\vec{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix} \qquad f: B \to \mathbb{R}$$

- Für die Ableitungen gilt:

$$\vec{x}_u(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u(u,v) \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_v(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v(u,v) \end{pmatrix}$$

- Damit erhalten wir:

$$|\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

- Flächeninhalt:

$$O(S) = \int_S dO = \int_B |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, dF$$

$$= \int_B \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, dF$$

② Beispiel Oberflächenintegral:

- Betrachte: $I = \int_H (x+y+z)\, dO$ mit

  H der Oberfläche der Halbkugel $x^2+y^2+z^2 \leq R$ vom Radius R $(z \geq 0)$

- Parametrisierung: Kugelkoordinaten

$$\vec{x} = (R\cos\varphi \sin\vartheta, R\sin\varphi \sin\vartheta, R\cos\vartheta)^T$$

$$B = \{ (\varphi, \vartheta)^T : \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \}$$

- Damit ist $x+y+z = R[\sin\vartheta (\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\vartheta]$

- Berechnung des Oberflächenelements:

$$\vec{x}_\varphi = R(-\sin\varphi \sin\vartheta, \cos\varphi \sin\vartheta, 0)^T$$

$$\vec{x}_\vartheta = R(\cos\varphi \cos\vartheta, \sin\varphi \cos\vartheta, -\sin\vartheta)^T$$

$$\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta = -R^2(\cos\varphi \sin^2\vartheta, \sin\varphi \sin^2\vartheta, \sin\vartheta\cos\vartheta)^T$$

$$|\vec{x}_\varphi \times \vec{x}_\vartheta| = R^2 \sin\vartheta$$

$$dO = R^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

- Oberflächenintegral:

$$I = \int_H (x+y+z)\, dO$$

$$= R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\sin\vartheta\,(\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\vartheta\right] \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta \; d\vartheta = \pi R^3$$