Analysis III

25. 01. 2018

J. Behrens

① Konzeption des Satzes von Stokes:

- gegeben $\partial S \;:\; \gamma(t) \quad t\in[t_a,t_e]\,,\; \gamma(t_a)=\gamma(t_e)$
  $S\subset\mathbb{R}^3$

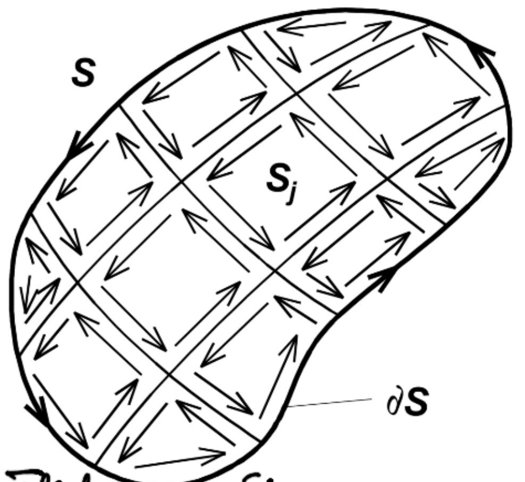
- Zerlege S in endlich viele S_j : $S=\bigcup_{j=1}^{p} S_j$,

  $S_i\cap S_j \; (i\neq j)$ besteht aus endlich vielen Kurvenstücken

- $\vec{v}$ sei stetig diff'bares Vektorfeld $\vec{v}: S\to\mathbb{R}^3$, $S\subset M$, $M\subset\mathbb{R}^3$

- Für die Zirkulation längs ∂S gilt:

$$\oint_{\partial S}\vec{v}\cdot\vec{dx} = \sum_{j=1}^{p}\oint_{S_j}\vec{v}\cdot\vec{dx}$$



- Falls S_j klein genug, gilt nach dem Satz über Zirkulation und Wirbelstärke

$$\oint_{\partial S_j}\vec{v}\cdot\vec{dx}\approx\vec{n}_j\cdot\operatorname{rot}\vec{v}(\vec{x}_j)\,F(S_j)$$

mit $\vec{x}_j\in S_j$, $\vec{n}_j$ Normalenvektor in $\vec{x}_j$, $F(S_j)$ Fläche von S_j

- Da die Orientierung von $\vec{n_j}$ aus der Orientierung von ∂S_j hervorgeht

$$\rightarrow \oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{dx} \approx \sum_{j=1}^{p} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n_j} \, F(S_j)$$

- Grenzübergang:

$$\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{dx} = \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{dO}$$

② Beispiel:

- Aufgabe: Berechne den Fluss $\mathcal{F}$ des Vektorfeldes

$$\vec{v}(x,y,z) = (xy, xz, -zy)^T \quad \text{durch}$$

$$S = \{(x,y,z)^T : z = x^2+y^2, x^2+y^2 \leq 1\} \text{ ins Innere von } S.$$

3 Lösungswege:

1) Direkter Weg:

- Parametrisieren: $\vec{x}(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ \rho^2 \end{pmatrix}$, $\rho \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi]$

- Tangentenvektoren: $\vec{x}_\rho \, (\cos\varphi, \sin\varphi, 2\rho)^T$

$$x_\varphi \, (-\rho \sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)^T$$

- Vektorprodukt: $\vec{x}_\rho \times \vec{x}_\varphi = (-2\rho^2 \cos\varphi, -2\rho^2 \sin\varphi, \rho)^T$

- Fluss: $\mathcal{F} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{n}\, dO = \int_S \vec{v} \cdot \vec{dO}$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \\ \rho^3 \cos\varphi \\ -\rho^3 \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\rho^2 \cos\varphi \\ -2\rho^2 \sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix} d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[-2\rho^4 \cos^2\varphi \sin\varphi - 2\rho^5 \cos\varphi \sin\varphi - \rho^4 \sin\varphi \right] d\varphi\, d\rho = 0$$

$\Rightarrow \mathcal{F} = 0$

2) <u>Vektorfeld als Potentialfeld</u> : $\vec{w}\left(x\frac{z^2}{2}, -xyz, 0\right)^T$

$\vec{w}$ ist das Vektorpotential von $\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{F} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{dO} = \int_S \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \vec{dO}$$

Da die Kreisfläche $S_K = \{(x,y,z) : x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = 1, \ \rho \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi]\}$ den selben orientierten Rand wie S besitzt, wende Satz von Stokes an:

$$\mathcal{F} = \int_{S_K} \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \vec{dO}$$

dabei zeigen die Normalen von S_K nach oben (in Richtung z)

- Parametrisierung : $\vec{x}(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 1)^T$
- Tangentenvektoren: $\vec{x}_\rho = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)^T$

  $x_\varphi = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)^T$
- Vektorprodukt: $\vec{x}_\rho \times x_\varphi = (0, 0, \rho)^T$
- Fluss: $\mathcal{F} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \rho^2 \cos\varphi \sin\varphi \\ \rho^3 \cos\varphi \\ -\rho^3 \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{pmatrix} d\varphi\, d\rho$

$$= -\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^4 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho = 0$$

3) <u>Kurvenintegral</u> : wegen $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ gilt auch

$$\mathcal{F} = \int_S \vec{v} \cdot \vec{dO} = \int_S \operatorname{rot} \vec{w} \cdot \vec{dO} = \oint_{\partial S} \vec{w} \cdot \vec{ds}$$

- Vektorfeld : $\vec{w} = \left(x \frac{z^2}{2}, -xyz, 0\right)^T$
- Parametrisierung : $(\partial S = \partial S_K)$: $\gamma(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 1)^T, \varphi \in [0, 2\pi]$
- Fluss: $\mathcal{F} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\varphi \\ -\cos\varphi \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos\varphi \sin\varphi - \cos^2\varphi \sin\varphi \right] d\varphi = 0$$