Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2018/19**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := 2x^2 + y^2 - 4x + z$ sowie der Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,3)^T$ und die Richtung $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2)$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}_0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}_0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}_0)$ für $\boldsymbol{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,-2)^{\mathrm{T}}$.

Können Sie entscheiden, ob es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt? Können Sie also entscheiden, ob die Funktionswerte steigen oder fallen wenn man von $\boldsymbol{x}_0$ aus in Richtung $\boldsymbol{a}$ geht?

c) Berechnen Sie die Funktionswerte $f(\boldsymbol{x}_0 + t\,\boldsymbol{a})$ für $t = \frac{\sqrt{6}}{2}, 2\sqrt{6}, 3\sqrt{6}$. Ergibt sich da nicht ein Widerspruch zu ihrem Ergebnis aus b?

Aufgabe 2:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *quellenfrei*, falls

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in D$$

gilt.

Das Vektorfeld heißt *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt. Wobei

im Fall $n = 3$: $$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} =$$

und im Fall $n = 2$ (nach Einbettung im $\mathbb{R}^3$) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \iff (f_2)_x - (f_1)_y = 0$.

Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}}\right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2.$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}\,(x, y, z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y\,)^{\mathrm{T}.}$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div}\,\boldsymbol{f}\,) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div}\,\boldsymbol{f}\,)\,, \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\,\boldsymbol{f}\,)$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwinded.

Abgabetermine: 19.–23.11.18