

## Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 6, Hausaufgaben

### Aufgabe 1:

a) Gegeben seien das Kraftfeld  $\mathbf{K}$  und die Kurve  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [1, 3].$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve  $\mathbf{c}$  von  $\mathbf{c}(1)$  nach  $\mathbf{c}(3)$  zu bewegen.

b) Gegeben seien die Vektorfelder  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie Potentiale zu  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$ , falls dies möglich ist.
- (ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

### Aufgabe 2:

Gegeben seien die Vektorfelder  $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz - \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ -2yz - \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ x^2 - y^2 - \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + z \\ y^2 z + z^3 \\ -y \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{6}] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie die Rotationen  $\mathbf{rot f}$  und  $\mathbf{rot g}$ .
- b) Überprüfen Sie für beide Vektorfelder  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{g}$ , ob diese ein Potential besitzen, und berechnen Sie gegebenenfalls ein solches.
- c) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

**Abgabetermine:** 14.–16.01.19