stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Flächeninhalt (Beispiel)

Kugeloberfläche:
$$x(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \theta\in[0,\pi],\quad \varphi\in[-\pi,\pi]$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial x}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) = r\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}(\theta,\varphi)\times\frac{\partial x}{\partial\varphi}(\theta,\varphi) = r^2\begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi \end{pmatrix}$$

$$= r^2\begin{pmatrix} \sin^2\theta\cos\varphi \\ \sin^2\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\cdot\sin\theta \end{pmatrix} = r^2\sin\theta\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial\theta}\times\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right|^2 = r^4\sin^2\theta\,\underbrace{\left(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+\cos^2\theta\right)}_{1}$$

stückweise reguläre Fläche

Buch Kap. 8.6

Flächeninhalt (Beispiel)

$$\left| \frac{\partial x}{\partial \theta} \times \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right| = r^2 \sin\theta$$

$$O = \int_B \left| \frac{\partial x}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \times \frac{\partial x}{\partial \varphi}(\theta,\varphi) \right| d(\theta,\varphi) = \int_0^\pi \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = 4\pi r^2$$

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

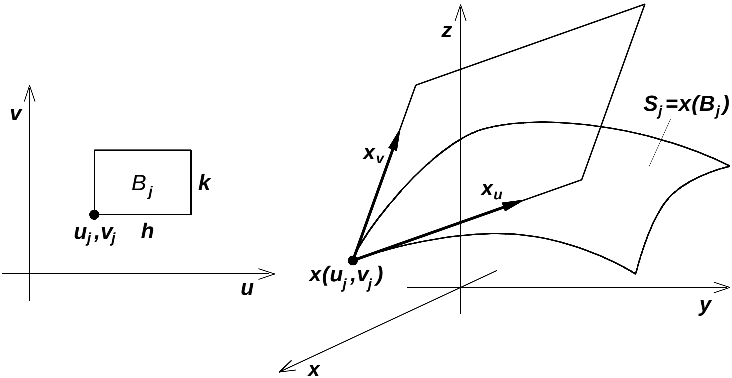


Abbildung 8.23:Übergang von B_j mittels $\mathbf{x}$ zu S_j

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Definition: Oberflächenintegral

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $B \subset D$ ein regulärer Bereich und $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x} : B \to S,\ \mathbf{x}(B) = S$. Wenn $f : S \to \mathbb{R}$ eine bschränkte Funktion ist und das Riemann Integral

$$\int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

existiert, so heißt

$$\int_S f\, dO := \int_B f(\mathbf{x}(u,v))|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)|\, dF$$

Oberflächenintegral der Funktion f über das reguläre Flächenstück S.

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral (Beispiel)

Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral (Beispiel)

Stückweise Integration über Oberflächen

Buch Kap. 8.6

Stückweise Integration über Oberflächen

Ist $S = \cup_{j=1}^{k} S_j$ eine stückweise reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$, wobei die Schnittmengen $S_i \cap S_j$ für $i \neq j$ aus höchstens endlich vielen regulären Kurvenstücken bestehen, so definiert man für eine stetige Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ das Oberflächenintegral $\int_S f\, dO$ durch

$$\int_S f\, dO = \sum_{j=1}^{k} \int_{S_j} f\, dO.$$

Ist $f : S \to \mathbb{R}$ stetig (bis auf eine Nullmenge), so existiert

$$\int_S f\, dO.$$

Berechnung des Oberflächenintegrals

Buch Kap. 8.6

Berechnung des Oberflächenintegrals

1) Falls nicht gegeben, Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$
2) Berechnung der Funktionswerte der Belegungsfunktion $f(\mathbf{x}(u, v))$
3) Berechnung des Oberflächenelements

$$dO = |\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dudv$$

   auf der Basis der Tangentenvektoren $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$
4) Berechnung des Oberflächenintegrals

$$\int_S f \, dO = \int_B f((\mathbf{x}(u, v))|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)| dudv$$

Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Buch Kap. 8.6

Eigenschaften des Oberflächenintegrals

Seien f und g stetige Funktionen auf der regulären Fläche S und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

(i) $\int_S (f+g)\, dO = \int_S f\, dO + \int_S g\, dO$ (Additivität),

(ii) $\int_S \alpha f\, dO = \alpha \int_S f\, dO$ (Homogenität),

(iii) aus $f \leq g$ folgt $\int_S f\, dO \leq \int_S g\, dO$ (Monotonie),

(iv) (Bereichsadditivität) S_1 und S_2 Flächen mit $S_1 \cap S_2 =$ endlich viele reguläre Kurvenstücke. Dann

$$\int_{S_1} f\, dO + \int_{S_2} f\, dO = \int_{S_1 \cup S_2} f\, dO\,,$$

(v) (Mittelwertsatz) S stückweise reguläre Fläche, $f : S \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\mathbf{x}_0 \in S$ mit $\int_S f\, dO = f(\mathbf{x}_0)\, O(S)$.

Flüsse

Buch Kap. 8.6

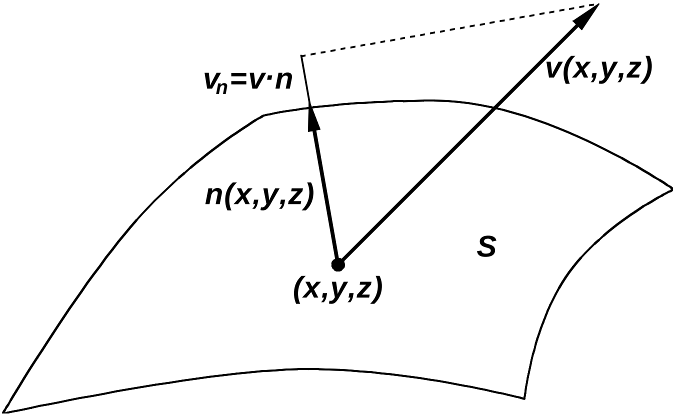


Abbildung 8.25: Normalenvektor und Normalkomponente eines Vektorfeldes auf einem Flächenelement

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Definition 8.14: Oberflächenintegral von Vektorfeldern

Seien $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v} : S \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann wird durch

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} := \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dO$$

das Oberflächenintegral des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch S bzw. der Fluss von $\mathbf{v}$ durch S definiert.

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral von Vektorfeldern (Beispiel)

Würfel:

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\int_B f(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, dO = \sum_{k=1}^{6} \int_{B_k} f(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, dO$$

$$\int_{B_1} f(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, dO = \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1 \, dy \, dz = 1$$

Parametrisierung $t(y,z) = (-1, y, z)$, $y,z \in [0,1]$, $n(x,y,z) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$t(y,z) \cdot n(x,y,z) = 1$ $\qquad t_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t_y \times t_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |t_y \times t_z| = 1$

Fluss eines Vektorfelds durch Flächen

Buch Kap. 8.6

Oberflächenintegral von Vektorfeldern (Beispiel)

Berechnung des Flusses

Buch Kap. 8.6

Berechnung des Flusses

1) Parametrisierung der Fläche S durch $\mathbf{x} : B \to \mathbb{R}^3$, B Bereich aus $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbf{x}(B) = S$
2) Berechnung der Werte des VF $\mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v))$ auf S
3) Berechne vektorielles Oberflächenelement

$$\mathbf{dO} = (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

4) Berechnung des Flussintegrals $= \det\left(v(x(u,v)), x_u(u,v), x_v(u,v)\right)$

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_B \mathbf{v}(\mathbf{x}(u, v)) \cdot (\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v))dudv$$

Zirkulation

Buch Kap. 8.6

Definition 8.15: Zirkulation

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und k eine geschlossene, reguläre, orientierte Kurve in M.
Das Kurvenintegral

$$Z = \oint_k \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

nennt man die Zirkulation von $\mathbf{v}$ längs der Kurve k.
Zirkulation ist also das Arbeitsintegral über v entlang geschlossener Kurven.

Zirkulation

Buch Kap. 8.4

Satz 8.7: (Satz von GREEN)

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $B \subset D$ ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen positiv orientierten Kurven besteht (d.h. Bereich liegt beim Durchlauf der Kurve auf der linken Seite), und $\mathbf{v} : D \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_B \underbrace{[\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y}]}_{=\mathrm{rot}\ \mathbf{v}} \, dF \, .$$

Zirkulation

Beispiel (Satz von Green)

$$B = \{ (x,y) : x^2+y^2 \leq R^2 \}$$

$$\partial B = \{ (x,y) : x^2+y^2 = R^2 \}$$

$$v(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\int_B \underbrace{\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}}_{=0} \, d(x,y) = 0$$

$$\int_{\partial B} v(x,y) \cdot d(x,y)$$

$$= \int_0^{2\pi} v(\cos t, \sin t) \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 0$$

Beispiel (Satz von GREEN)

Zwei Parametrisierungen ein und derselben Kurve

$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\gamma_2 : [0, \sqrt{2\pi}] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 \\ \sin t^2 \end{pmatrix}$

Subst. $t = s^2$

$\frac{dt}{ds} = 2s \Rightarrow dt = 2s\,ds$

$$\int_{\gamma_1} f(x)\cdot dx = \int_0^{2\pi} f(\gamma_1(t))\cdot \dot\gamma_1(t)\, dt$$

$$= \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(\gamma_1(s^2))\cdot \dot\gamma_1(s^2)\cdot 2s\, ds = \int_0^{\sqrt{2\pi}} f(\underbrace{\gamma_1(t^2)}_{=\gamma_2(t)})\cdot \underbrace{\dot\gamma_1(t^2)\cdot 2t}_{\dot\gamma_2(t)}\, dt$$

$$= \int_{\gamma_2} f(x)\, dx$$

Zirkulation

Definition 8.16: (Wirbelstärke)

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und $\mathbf{x}_0 \in M$. Der Grenzwert

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) := \lim_{|A| \to 0, \mathbf{x}_0 \in A} \frac{1}{F(A)} \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx}$$

heißt die Wirbelstärke von $\mathbf{v}$ bezüglich der Einheitsrichtung $\mathbf{n}$ in $\mathbf{x}_0$.
Dabei werden mit $A \subset M$ ebene, einfach zusammenhängende und stückweise glatt berandete Flächenstücke bezeichnet, die die gleiche Einheitsnormale $\mathbf{n}$ haben. $|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} \{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|\}$.
Es gilt Satz 8.12 (Beweis mit Satz 8.7 von Green :

$$W_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}_0).$$

Man nennt $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ das zu $\mathbf{v}$ gehörende Wirbelfeld.

Wirbelstärke und Zirkulation

Buch Kap. 8.6

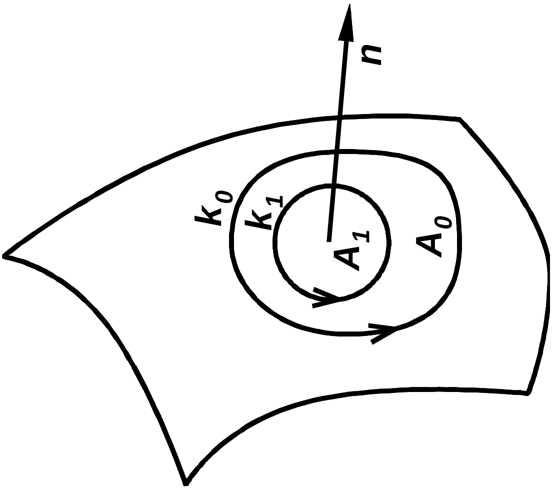


Abbildung 8.29: Von der Zirkulation zur Wirbelstärke

Zirkulation auf Flächen

Buch Kap. 8

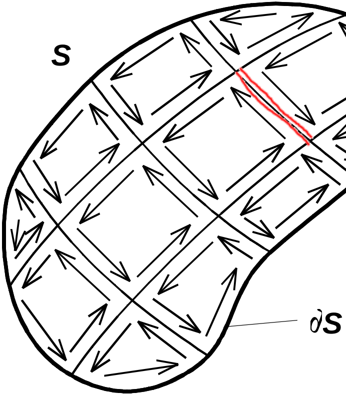


Abbildung 8.31: Zirkulation um S und Wirbelstärke auf S

Es gilt

$$\oint_{\partial S} v \cdot dx = \sum_{j=1}^{p} \oint_{\partial S_j} v \cdot dx$$

Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$

Buch Kap. 8.7

Satz 8.13: (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

Es sei $\mathbf{v} : M \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, $M \subset \mathbb{R}^3$, offen, und S ein reguläres Flächenstück in M, welches von einer regulären, orientierten Kurve ∂S berandet sei. Dann gilt

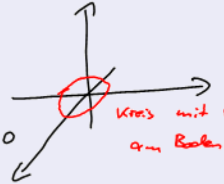
$$\oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dx} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} \equiv \int_S \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot n dO.$$

Dabei bildet n zusammen mit der Tangente und der Normalen an ∂S ein Rechtssystem (positiv orientiertes Dreibein).

Beispiel (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} \qquad B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x^2+y^2 = 1 \wedge z = 0 \right\}$$

$$\operatorname{rot} v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_B v(x,y,z) \cdot n(x,y,z) \, dO = 0$$



Kreis mit Radius 1 am Boden

$$\int_{\partial B} v(x,y,z) \cdot d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} v\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \sin t \cos t \, dt$$

Beispiel (Satz von STOKES in $\mathbb{R}^3$)

$$= \frac{1}{2}\sin^2 t \Big|_0^{2\pi} = 0$$

Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$

Buch Kap. 8.7

Beispiel (Satz von Stokes in $\mathbb{R}^3$)

Illustration zum Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Quelle

div > 0

Senken

div < 0

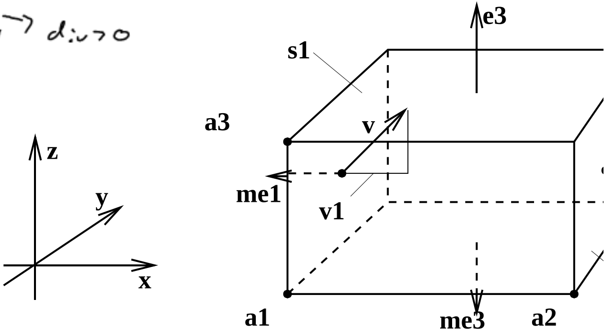


Abbildung 8.31: Fluss des Vektors **v** durch die Begrenzungsflächen S_1, S_2 des Quaders Q

Illustration zum Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

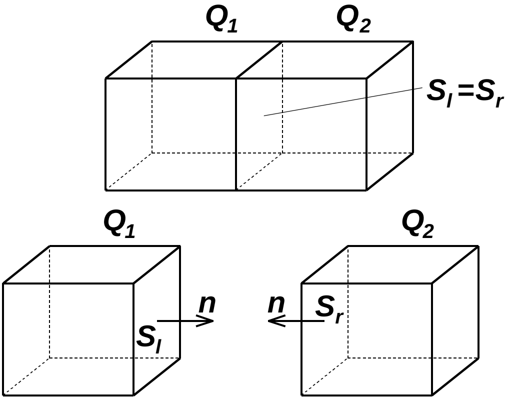


Abbildung 8.32: $Q = Q_1 \cup Q_2$, Flüsse über S_l und S_r heben sich auf.

Satz von GAUSS

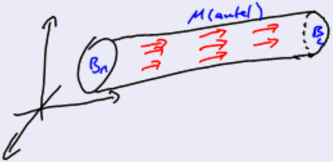
Buch Kap. 8.11

Satz 8.20: (Satz von GAUSS)

Sei B ein regulärer Bereich, die Normale $\mathbf{n}$ weise in den Randpunkten von B aus B heraus (man spricht hier auch von der äußeren Normalen). Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{dO} = \int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dO \, .$$

Beispiel (Satz von GAUSS)



$$v(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} v(x,y,z) = 0$$

$$\int_B \operatorname{div} v(x,y,z)\, dV = 0$$

$$\int_{\partial B} v(x,y,z) \cdot n(x,y,z)\, dO = \underbrace{\int_{B_1} v(x,y,z) \cdot n(x,y,z)\, dO}_{= -\int_{B_2} v\, n\, dO} + \int_{B_2} v(x,y,z) \cdot n(x,y,z)\, dO$$

$$+ \int_M \underbrace{v(x,y,z) \cdot n(x,y,z)}_{=0}\, dO = 0$$

Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Beispiel (Satz von GAUSS)

Beispiel (Satz von GAUSS)

Satz von GAUSS

Buch Kap. 8.11

Erste Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} f] dV .$$

Zweite Greensche Formel

$$\int_{\partial B} \varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} - f \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \, dO = \int_B [\varphi \, \Delta \, f - f \, \Delta \, \varphi] dV .$$