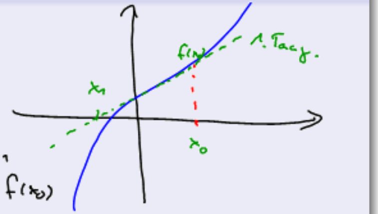
Das NEWTON-Verfahren

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme Buch Kap. 5.16

Motivation



$$T_0(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$T_0(x_1) = 0 \Rightarrow 0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_1 = x_0 - \left(f'(x_0)\right)^{-1} f(x_0)$$

$$T_1(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1), \quad T_1(x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \left(f'(x_1)\right)^{-1} f(x_1)$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(f'(x_n)\right)^{-1} f(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) = -\left(f'(x_n)\right)^{-1} f(x_n)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -f(x_n)$$

D.h. Löse $f'(x_n)\, y = -f(x_n)$ nach y

$$x_{n+1} = y + x_n$$

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

Betrachte zu $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x) = 0.$$

Das numerische Lösungsverfahren der Wahl für solche Gleichungen ist das Newton Verfahren

1) Wähle Startwert $x^0 \in \mathring{D}$, setze $k = 0$.
2) Ist $f(x^k) = 0$, STOP (mit $x = x^k$ gilt $f(x) = 0$).
3) Berechne x^{k+1} aus x^k gemäß

$$f'(x^k)\delta x = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + \delta x$$

4) k = k+1, gehe zu 2).

Auf dem Rechner: $f(x^k) = 0$ ist zu ersetzen durch ein geeignetes Abbruchkriterium.

NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

Buch Kap. 5.16

Satz 5.18: NEWTON-Verfahren für Gleichungssysteme

$\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei stetig differenzierbar und besitze eine Nullstelle $\bar{\mathbf{x}} \in \mathring{D}$. Weiterhin sei $\mathbf{f}'(\bar{x})$ regulär. Es gibt eine Umgebung U von $\bar{\mathbf{x}}$, so dass die NEWTON-Folge $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, ..., \mathbf{x}^k, ...$ von einem beliebigen $\mathbf{x}^0 \in U$ ausgehend gegen die Nullstelle $\bar{\mathbf{x}}$ von f konvergiert. Die Konvergenz ist superlinear, d.h. es gilt

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|). \Longleftrightarrow \lim_{k \to \infty} \frac{x^k - \bar{x}}{x^{k-1} - \bar{x}} = 0$$

Ist zusätzlich f' Lipschitz stetig, so ist die Konvergenz quadratisch, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $k = 1, 2, 3, ...$

$$|\mathbf{x}^k - \bar{\mathbf{x}}| \leq C|\mathbf{x}^{k-1} - \bar{\mathbf{x}}|^2$$

gilt. $|f'(x) - f'(y)| \leq L\,|x - y|$

Operatoren der Vektoranalysis

Operatoren der Vektoranalysis

Definition 7.1-7.4: Operatoren der Vektoranalysis

Sei $\phi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein stetig partiell differenzierbares Skalarfeld, $v : D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld.

- Gradient

$$\text{grad: } \phi \mapsto \text{grad } \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

- Divergenz

$$\text{div: } v \mapsto \text{div } \mathbf{v} := \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n} \quad = \text{Spur } v'$$

- Laplace Operator

$$\phi \mapsto \Delta\ \phi := \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

$$\text{div grad } \phi = \text{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_n} \phi \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \phi \end{pmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \phi + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \phi + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \phi$$

- Rotation ($n = 3$)

$$v \mapsto \text{rot } \mathbf{v} := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Der “Nabla-Operator”

Formal

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

grad: $$\nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

div: $$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Der "Nabla-Operator"

Formal

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\Delta\, \phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_n^2}$$

Rotation (n=3)

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

$k: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$

$$k(x) = \frac{k}{|x|^3} x = \frac{k}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} k_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{k x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}} = k \frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}} - x_1 \cdot 2x_1 (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{2}}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^3}$$

$$= k \frac{|x|^3 - 3x_1^2 \, |x|}{|x|^6} = k \frac{|x|^2 - 3x_1^2}{|x|^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} k_2(x) = k \frac{|x|^2 - 3x_2^2}{|x|^5}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} k_3(x) = k \frac{|x|^2 - 3x_3^2}{|x|^5}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} k(x) = k \frac{3|x|^2 - 3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{|x|^5} = 0$$

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_3 \\ x_2 - x_3^3 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div} f(x) = 2x_1 + 1 \qquad \operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} 0 + 3x_3^2 \\ -2 - 3x_1^2 \\ 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_3^2 \\ -2 - 3x_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operatoren der Vektoranalysis

Beispiele

Operatoren der Vektoranalysis

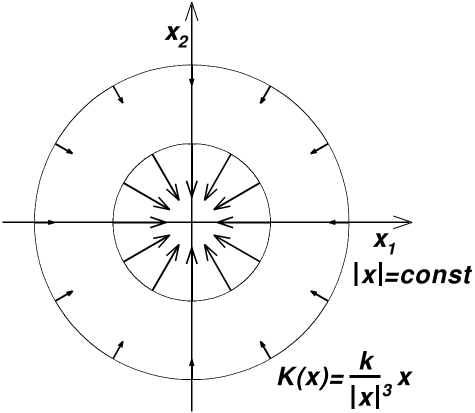


Abbildung 7.1: Zentralkraftfeld $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{k}{|x|^3}x$ für $k < 0$ in der Ebene $x_3 = 0$.

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Beispiele

Operatoren der Vektoranalysis

Buch Kap. 7.1

Anwendung von grad, Δ auf Vektorfelder

Sei $\mathbf{v}$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld und $\mathbf{w}$ ein zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld.

$$\Delta\,\mathbf{w} := \begin{pmatrix} \Delta\, w_1 \\ \Delta\, w_2 \\ \\ \vdots \\ \Delta\, w_n \end{pmatrix}, \text{ und } (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v} := \begin{pmatrix} (\mathbf{w} \cdot \nabla)v_1 \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla)v_2 \\ \vdots \\ (\mathbf{w} \cdot \nabla)v_n \end{pmatrix}.$$

also $\Delta\,\mathbf{w}$ als die komponentenweise Anwendung von Δ.

$$(w \cdot \nabla)v_i = \left(w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) v_i = w_1 \frac{\partial}{\partial x_1} v_i + \dots + w_n \frac{\partial}{\partial x_n} v_i$$

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Defintion 7.6: (Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld)

Sei $\mathbf{v}$ ein Vektorfeld.
Ein differenzierbares Skalarfeld ϕ, das die Gleichung

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{v}$$

erfüllt, nennt man ein Potential oder eine Stammfunktion von $\mathbf{v}$.
Falls es zu einem Vektorfeld $\mathbf{v}$ ein Potential ϕ gibt, nennt man $\mathbf{v}$ Potentialfeld oder Gradientenfeld (der Begriff konservatives Feld wird auch verwendet).

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 - 2x_3 \\ x_2 - x_3^3 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$$

Angenommen, für $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gölte $\operatorname{grad} \phi = V$

$$\Rightarrow 3x_3^2 = \frac{\partial}{\partial x_3} V_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} \phi(x_1, x_2, x_3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} V_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad ↯$$

Für die Existenz eines Potenzials muss gelten

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \iff \operatorname{rot} v = 0$$

Potential und Potentialfeld

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

$$K(x) = \frac{k\,x}{|x|^3}$$

Ans. für $\phi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ gilt $\nabla\phi = K(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x) = \frac{k\,x_1}{|x|^3} = \frac{k\,x_1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi(x_{11},0,0) - \phi(x_{10},0,0) = \int_{x_{10}}^{x_{11}} \frac{\partial}{\partial x_1}\phi(x_1,0,0)\,dx_1$$

$0 \notin [x_{10}, x_{11}]$

$$= \int_{x_{10}}^{x_{11}} \frac{k}{x_1^2}\,dx_1 = \frac{-k}{x_1}\Big|_{x_{10}}^{x_{11}}$$

$$\phi(x_1,0,0) = \frac{-k}{x_1} + C_1 \,, \quad \phi(0,x_2,0) = \frac{-k}{x_2} + C_2$$

Potential und Potentialfeld

Buch Kap. 7.3

Potential, Potentialfeld, Gradientenfeld

Wir raten $\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{-k}{|x|}$