Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Gegeben sind die folgenden Funktionen
$f_k : D_k \to \mathbb{R}$; $D_k = [-1,1] \times [-1,1]$ für $k = 1,2,4$ und $D_3 = D_1 \setminus \{(0,0)\}$ mit

$$f_1(x,y) = x - 2\,y, \qquad f_2(x,y) = x\,y,$$
$$f_3(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_4(x,y) = \cos(2\pi y)\,\sin(\pi x)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Gradienten der Funktionen.

b) Zeichnen Sie für f_1 und f_3 einige Linien bzw. Kurven entlang derer die jeweilige Funktion konstant ist. Das sind die sogenannten Höhenlinien. Heften Sie an vier beliebigen Punkten Ihrer Höhenlinien die Richtung der Gradienten in diesen Punkten an. Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad u(x,t) := \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von u.

b) Die Wärmeleitungsgleichung lautet $\Delta u - \frac{1}{k} u_t = \mathbf{0}$. Es sei $k = 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Funktion u die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_{xx} - u_t = 0$ löst. Skizzieren Sie die Lösung für mindestens vier verschiedene $t-$ Werte.

(ii) Seien $w(x,t)$ und $v(x,t)$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung. Zeigen Sie, dass dann

$$u(x,y,t) := w(x,t) \cdot v(y,t)$$

die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$u_{xx} + u_{yy} - u_t = 0$$

löst und geben Sie eine nichttriviale (d.h. nicht überall verschwindende) Lösung der zweidimensionalen Wärmeleitungsgleichung an.

Bearbeitungstermine: 16.11.-20.11.2020