Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2020/21**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1: (3+3+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\boldsymbol{x}) := -x^2 - y^2 + 2x + z$.

a) Geben Sie eine Gleichung für die Niveaufläche $N_{\boldsymbol{x}^0}$ der Funktion f im Punkt $\boldsymbol{x}^0 = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$ an, und berechnen Sie den Gradienten von f in $\boldsymbol{x}^0$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitungen $D_{\boldsymbol{w}^{[j]}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $j = 1,2,3$,
$\boldsymbol{v}^{[1]} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[2]} = (1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}^{[3]} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$
und $\boldsymbol{w}^{[j]} := \frac{\boldsymbol{v}^{[j]}}{\|\boldsymbol{v}^{[j]}\|}$.
Können Sie für $j = 1,2,3$ entscheiden, ob es sich bei $\boldsymbol{w}^{[j]}$ um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung handelt?

c) Berechnen Sie die Richtungsableitung $D_{\tilde{\boldsymbol{v}}} f(\boldsymbol{x}^0)$ für $\tilde{\boldsymbol{v}} = 1/\sqrt{17}(0,-4,1)^{\mathrm{T}}$. Handelt es sich um eine Aufstiegs- oder Abstiegsrichtung?
Berechnen Sie den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + 2\sqrt{17}\,\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Ergibt sich da nicht ein Widerspruch?
Berechnen Sie nun den Funktionswert im Punkt $\boldsymbol{x}^0 + \frac{\sqrt{17}}{2}\tilde{\boldsymbol{v}}$.
Erklären Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 2:

a) Ein C^1–Vektorfeld $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt *quellenfrei*, falls

$$\operatorname{div} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \forall\, \boldsymbol{x} \in D$$

gilt.
Das Vektorfeld heißt *wirbelfrei*, falls $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ für alle $\boldsymbol{x} \in D$ gilt. Wobei

im Fall $n = 3$: $$\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} (f_3)_y - (f_2)_z \\ (f_1)_z - (f_3)_x \\ (f_2)_x - (f_1)_y \end{pmatrix} =$$

und im Fall $n = 2$ (nach Einbettung im $\mathbb{R}^3$) $\operatorname{rot} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \iff (f_2)_x - (f_1)_y = 0\,.$

Gegeben sei das von einem Parameter $\alpha > 0$ abhängige Vektorfeld

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{f}(x,y) := \left(\frac{-y}{r^{2\alpha}}, \frac{x}{r^{2\alpha}} \right)^{\mathrm{T}}, \qquad r^2 := x^2 + y^2 .$$

Für welche Parameter α ist das Vektorfeld quellenfrei?

Gibt es ein α, so dass $\boldsymbol{f}$ wirbelfrei wird?

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + y + 4z,\ y^2 + 2z + 5x,\ z^2 + 3x + 6y)^{\mathrm{T}}.$$

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}) \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \boldsymbol{f}), \qquad \text{bzw.} \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f})$$

falls diese definiert sind. Einer der Ausdrücke verschwindet für die vorgegebene Funktion $\boldsymbol{f}$ identisch. Zeigen Sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass dieser Ausdruck nicht für beliebige $\boldsymbol{f}$ identisch verschwinded.

Abgabetermine: 30.11.–04.12.20