

Analysis III für Studierende der Ingenieurwissenschaften Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: (Alte Klausuraufgaben)

a) Gegeben seien das Kraftfeld \mathbf{K} und die Kurve \mathbf{c}

$$\mathbf{K}(x, y, z) := \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}(t) := \begin{pmatrix} t \cdot \cos(t) \\ t \cdot \sin(t) \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [1, 3].$$

Berechnen Sie die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve \mathbf{c} von $\mathbf{c}(1)$ nach $\mathbf{c}(3)$ zu bewegen.

b) Gegeben seien die Vektorfelder $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{f} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ xy^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve

$$\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

- (i) Berechnen Sie Potentiale zu \mathbf{f} und \mathbf{g} , falls dies möglich ist.
- (ii) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} d\mathbf{x}, \quad \text{und} \quad \int_{\mathbf{c}} \mathbf{g} d\mathbf{x}.$$

Aufgabe 2)

Gegeben sind die Vektorfelder $\mathbf{v}^{[i]} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 2$ bzw. 3

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{[1]}(x, y) &= (x^3, y^3)^T, & D &:= \mathbb{R}^2, \\ \mathbf{v}^{[2]}(x, y, z) &= (xy^2 + xz^2, yx^2 + yz^2, zy^2 + zx^2)^T, & D &:= \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{v}^{[3]}(x, y, z) &= (-y^2, xy, -2y)^T, & D &:= \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, z \right)^T, & D &:= \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie

$$\oint_C \mathbf{v}^{[4]}(x, y, z) d(x, y, z)$$

entlang des Kreises

$$\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0) \quad t \in [0, 2\pi].$$

b) Prüfen Sie, welche der Vektorfelder $\mathbf{v}^{[i]}$, $i = 1, 2, 3, 4$ Potentiale besitzen und berechnen Sie gegebenenfalls jeweils ein Potential.

c) Berechnen Sie zu $v^{[1]}(x, y)$ die Arbeit, die aufgewendet werden muss, um einen Massenpunkt entlang der Kurve \mathbf{c}

$$\mathbf{c}(t) = \left(t(t-4) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), t \right)^T, \quad t \in [a, b] := [0, 4].$$

von $c(0)$ nach $c(4)$ zu bewegen.

Bearbeitungstermine: 25.01.– 29.01.21