Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser, Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x,y) := 3x - 5y, \qquad g(x,y) := \frac{1}{5}(x^2+y^2) + 1 .$$

a) Berechnen Sie die Gradienten von f und g.

b) Zeichnen Sie für f die Höhenlinien $f^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : f(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_1 = 5$, $C_2 = 0$ und $C_3 = -10$.
Heften Sie in den Punkten $P_1 = \binom{0}{-1}$, $P_2 = \binom{5}{3}$ und $P_3 = \binom{-5}{-1}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

c) Zeichnen Sie für g die Höhenlinien $g^{-1}(C) := \{(x,y)^{\mathrm{T}} : g(x,y) = C\}$ zu den Funktionswerten $C_4 = \frac{6}{5}$, $C_5 = \frac{21}{5}$ und $C_6 = 6$.
Heften Sie in den Punkten $P_4 = \binom{0}{-1}$, $P_5 = \binom{4}{0}$ und $P_6 = \binom{3}{4}$ jeweils die Richtung des Gradienten an.

d) Versuchen Sie anhand Ihrer Beobachtungen (d.h. ohne Beweis) eine Vermutung zu äußern, wie die Richtung des Gradienten in einem festen Punkt mit der Richtung der Höhenlinie durch diesen Punkt zusammenhängt.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \cos(2x-3y) + x^3 - y^3 + 2y^2 .$$

a) Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen erster, zweiter und dritter Ordnung von f.

b) Die *Tangentialebene* an den Graphen einer differenzierbaren Funktion $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $(x^0, y^0) \in D_f \subset \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$z = f(x^0,y^0) + f_x(x^0,y^0)\,(x-x^0) + f_y(x^0,y^0)\,(y-y^0) .$$

Geben Sie die Gleichung der Tangentialebene von f im Punkt $(x^0,y^0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ an.

Bearbeitungstermine: 01.–05.11.21