Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2021/22**
Prof. Dr. I. Gasser
Dr. H. P. Kiani

Analysis III
für Studierende der Ingenieurwissenschaften
Blatt 5, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \text{Gesucht sind die Minima von} & f(x,y) = 2 - x + \dfrac{4}{9}\,y \\ \text{unter der Nebenbedingung} & g(x,y) = 25 - 9x^2 - y^2 \geq 0\,. \end{array} \tag{1}$$

a) Gibt es lokale Minima im Innern des zulässigen Bereiches, d.h. für $25 - 9x^2 - y^2 > 0\,.$? Begründen Sie ihre Antwort.

   Hinweis: lokale Minima im Innern der zulässigen Menge sind auch lokale Minima des unrestringierten Problems: $\min_{x,y\in\mathbb{R}} \quad f(x,y) = 2 - x + \frac{4}{9}\,y\,.$

b) Bestimmen Sie alle globalen Minima von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = 25 - 9x^2 - y^2 = 0$$

   mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren Regel. Überprüfen Sie zunächst die Regularitätsbedingung.

   Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch durch Elimination einer der Variablen gelöst werden. Hier soll aber an einem einfachen Beispiel die neu eingeführte Lösungsmethode geübt werden.

c) Geben Sie alle globalen Minima des Optimierungsproblems (1) an.
   (Hinweis: nutzen Sie a) und b))

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Minimierungsaufgabe

$$f(x,y,z) := 2x + y + z = \min!$$

unter den Nebenbedingungen

$$g(x,y,z) := x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$
$$h(x,y,z) := x^2 + (y - z)^2 = 1.$$

a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ zusammen mit geeigneten Multiplikatoren ein stationärer Punkt der zugehörigen Lagrange–Funktion $F := f + \lambda_1 g + \lambda_2 h$ ist.

b) Zeigen Sie, dass im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (1,2,2)^T$ ein lokales Maximum der Funktion f unter den gegebenen Nebenbedingungen vorliegt. Überprüfen Sie dazu die hinreichende Bedingung zweiter Ordnung.

Bearbeitungstermine: 13.12–17.12.21