

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 21:

Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y^2 + (y')^2 - yy' dt$$

für alle C^1 -Funktionen y mit $y(0) = 1$.

- Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- bestimme die natürliche Randbedingung und
- löse die zugehörige Randwertaufgabe.
- Zur Berechnung verwende man alternativ die Hamilton-Funktion.

Aufgabe 22:

Man bestimme die Greensche Funktion des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} y''(t) - \frac{2}{t}y'(t) + \frac{2}{t^2}y(t) &= h(t), \quad 1 \leq t \leq 2 \\ y(1) = 0, \quad y(2) - y'(2) &= 0 \end{aligned}$$

und löse damit die Randwertaufgabe für $h(t) := t$.

Hinweis: Die homogene Differentialgleichung besitzt Lösungen der Form $y(t) = t^\alpha$.

Aufgabe 23:

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$-y'' + 5y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(3) = 0.$$

Aufgabe 24:

Man untersuche das Mehrschrittverfahren

$$Y_{j+2} = Y_j + \frac{h}{6} (f_{j+2} + 10f_{j+1} + f_j)$$

auf starke und schwache Stabilität und bestimme die Ordnung des Verfahrens.

Abgabetermin: 28.01. - 1.02. (zu Beginn der Übung)