2. 11. 2007 ①

VORLESUNG DGL 1

TAUBERT

Erinnerung

$F(t, y, y', \dots, y^{(m)}) = 0$ Implizite DGL m-ter Ordnung

$y^{(m)} = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)})$ Explizite DGL m-ter Ordnung

Tritt t auf : nicht autonom

Tritt t nicht auf : autonom

$y(\cdot)$ Lösung auf $[a,b]$

$\Updownarrow$

$y \in C^m[a,b]$ y erfüllt die DGL für alle $t \in [a,b]$

Beispiel $y' + ay = 0$ $a \in \mathbb{R}$

$y(t) = \alpha e^{-at}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

BEISPIELE

Implizit erster Ordnung

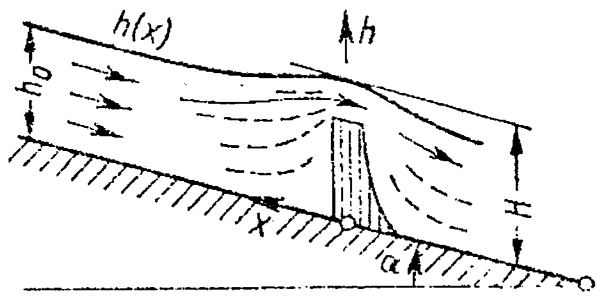
$$y(t)\,y'(t) - t\,y'^2(t) - \frac{1}{2} = 0$$

explizit zweiter Ordnung

$$m y'' = k y + \cos(t)$$

explizit erster Ordnung autonom

$$-h'(x) = \alpha\left(1 - \left(\frac{h_0}{h(x)}\right)^4\right)$$



I/47. Oberflächenform im Längsschnitt einer gestauten Wasserströmung

<u>Beispiel</u>

$$y'' + ay' + by = u(t)$$

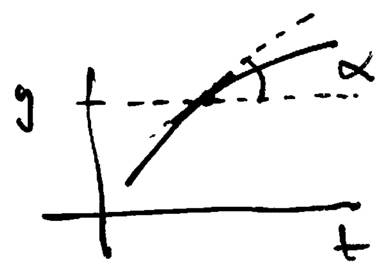
DGL 2-ter Ordnung (Transformation)
in erster Ordnung

$$y' = z$$
$$z' = -az - by + u(t)$$

System 1-ter Ordnung

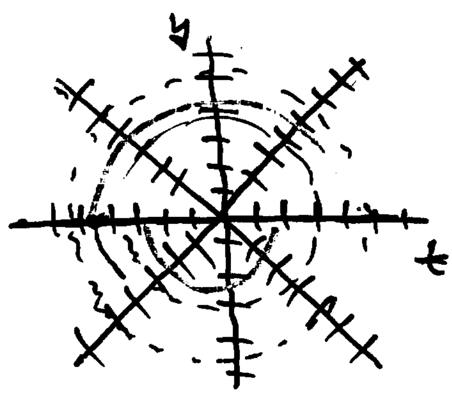
Geometrische Deutung

$y'(t)$



$y' = -\dfrac{t}{y}$

$y \neq 0$



$\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}t^2 = r^2$

$\cap \longrightarrow$ LÖSUNGEN!

!! Nur für betroffene Studenten/innen !!

SONDERVERANSTALTUNG

wegen

ÜBERSCHNEIDUNG

Chemiepraktikum III für Verfahrenstechniker ⟷ DGL 1

(Wiederholung DGL 1, Vorlesungen 1-6 DGL)

7.11.07	Mi	H5	$14^{15}-15^{45}$
14.11.07	Mi	H5	$14^{15}-15^{45}$
21.11.07	Mi	R241	$14^{15}-15^{45}$
28.11.07	Mi	H5	$14^{15}-15^{45}$

ORT:

GEOMATIKUM: BUNDESSTR. 55

(Bei U-Bahn Schlump)

ELEMENTARE LÖSUNGSMETHODEN

Buch: "KAMKE"

1. Separierbare DGL

(*) $y' = f(t)g(y)$

a. $g(y) \neq 0$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{g(y)} = \int_{t_0}^{t} f(s)ds$$

H sei Stammfunktion zu $\frac{1}{g}$

$$y(t) = H^{-1}\left(H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)ds \right)$$

Lösung von (*) mit $y(t_0) = y_0$

b. $g(y_0) = 0$

$y(t) \equiv y_0$ Lösung

1. $ay' + y = b \quad a \neq 0$
2. $xy' - y^2 + 1 = 0 \quad x \neq 0$
3. $y' = -\frac{y}{x}$
4. $y' = \mu - y^2 \quad \mu \in \mathbb{R}$

2. Homogene DGL

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

Variablentransformation $\quad u = \frac{y}{t}$

$\longrightarrow \quad u' = \frac{f(u) - u}{t}$ separierbar!

Beispiel: $\quad y' = \frac{x-y}{x} \quad x \neq 0$

3. LINEARE DGL. ERSTER ORDNUNG

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t) \qquad (*)$$

Inhomogenität

Linear : y' und y treten linear auf

Ordnung 1 :

$h(t) \equiv 0$: homogen

$h(t) \not\equiv 0$: inhomogen

WIE FINDET MAN DIE ALLGEMEINE LÖSUNG ?

BETRACHTE DIE BEIDEN AUFGABEN

FINDE

ALLE LÖSUNGEN y_h VON	EINE LÖSUNG y_p VON
$y'(t) + a(t)y(t) = 0$	$y'(t) + a(t)y(t) = h(t)$

ERGEBNIS

JEDE LÖSUNG VON (*) HAT DIE FORM

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

p steht für partikulär / speziell

Allgemeine Lösung von $y'(t) + a(t)y(t) = h(t)$

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = h(t)$$
$$\downarrow$$
$$y'(t) + a(t)y(t) = 0$$

(Lineare homogene DGL erster Ordnung)

WIE FINDE ICH DEREN ALLGEMEINE LÖSUNG?

1. RATEN!!

$$y(t) = c\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$\left(y'(t) + a(t)y(t) = c\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\left(-a(t) + a(t)c\,e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}\right) \equiv 0 \right)$$

z. B. $\qquad a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$

$$y(t) = c\,e^{-a(t-t_0)} = D\,e^{-at}$$

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$$

2. $y'(t) = -a(t)\,y(t) \implies$ Separierbar

$$\int_{y_0}^{y} \frac{du}{u} = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

$y, y_0 > 0$

$$\ln(y) - \ln(y_0) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \iff \ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

$$y(t) = y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

$y, y_0 < 0 \quad \rightsquigarrow \quad -\int_{y_0}^{y} \frac{du}{-u} = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$

$$\ln(-y) - \ln(-y_0) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \iff \ln\left(\frac{-y}{-y_0}\right) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds$$

$$y(t) = y_0\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

$$\ln(|y|) - \ln(|y_0|) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \iff \ln\left(\left|\frac{y}{y_0}\right|\right) = -\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds \quad !!!$$

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t)$$

Wie finde ich eine spezielle Lösung?

Trick: VARIATION DER KONSTANTEN

Ansatz

$$y(t) = C(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

"Konstante der Lösung der homogenen Aufgabe zeitabhängig machen!"

$$y'(t) + a(t)y(t) = C'(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + C(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}(-a(t)) + a(t)\,C(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

$$\Longrightarrow$$

$$y'(t) + a(t)y(t) = C'(t)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \overset{!!}{=} h(t)$$

$$\Rightarrow C'(t) = h(t)\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

$$\Rightarrow C(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \quad y_p(t) = \left(\int_{t_0}^{t} h(\tau)\, e^{\int_{t_0}^{\tau} a(s)ds}\, d\tau\right) e^{-\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$$

Muß ich eine partikuläre Lösung <u>immer</u> über die Variation der Konstanten ermitteln?

NEIN

<u>Beispiel</u>

$\dot{y} + y = 1$ $\qquad\qquad$ $y' + y = t + 1$

$y \equiv 1$ Lösung $\qquad\qquad$ $y \equiv t$ Lösung.

$\rightsquigarrow$ Bei speziellen Formen von $h(t)$ kann es sehr viel einfacher sein

AUFFINDEN SPEZIELLER LÖSUNGEN MIT SPEZIELLEN ANSÄTZEN $(a(t) = a)$

1. $h(t) = \sum_{k=0}^{m} b_k t^k$, $\qquad y_p(t) = \sum_{k=0}^{m} c_k t^k$

2. $h(t) = b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$ $\qquad y_p(t) = A\cos(\omega t - \gamma)$

3. $h(t) = b e^{\lambda t}$ $\qquad y_p(t) = \begin{cases} ce^{\lambda t} & \lambda \neq -a \\ cte^{\lambda t} & \lambda = -a \end{cases}$

<u>Beispiel</u>

$y' + y = 2e^{3t}$ $\qquad y_p(t) = ce^{3t}$

$$3ce^{3t} + ce^{3t} = 2e^{3t}$$

$$\Longrightarrow \quad c = \frac{1}{2}$$

Satz

Die allgemeine Lösung von

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = h(t)$$

läßt sich darstellen in der Form

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Dabei ist $y_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = 0$$

und $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'(t) + a(t)\,y(t) = h(t)$$

Beispiel

$$y'(t) + a y(t) = h(t) \qquad y(t_0) = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} h(\tau)\, e^{-a(t-\tau)}\, d\tau$$

Lösung von

$$y' + ay = 0$$
$$y(t_0) = y_0$$

Lösung von

$$y' + ay = h(t)$$
$$y(t_0) = 0$$

Beispiele

$$y' + y = 2e^{3t}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = Ce^{-t}$$

Ansatz für partikuläre Lösung

$$y_p(t) = Ce^{3t} \longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$y(t) = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

$$y' - 3y = 2e^{3t}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

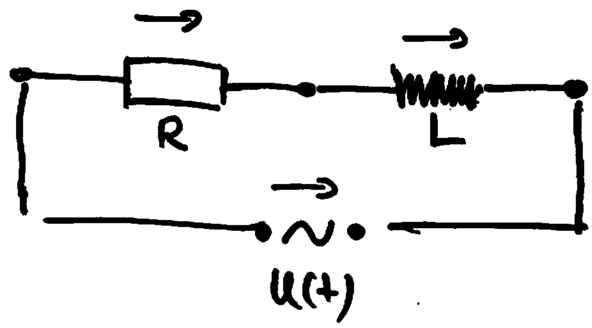
$$y_h(t) = Ce^{3t}$$

Ansatz für partikuläre Lösung

$$y_p(t) = Cte^{3t} \longrightarrow C = 2$$

$$y(t) = Ce^{3t} + 2te^{3t}$$

Beispiel



$U(t) = U_0 \sin\omega t$

(I,U)-Relationen

$U_R = RI$

$U_L = L\dot{I}$

Kirchhoff:

$$U_L + U_R = U(t)$$

$$L\dot{I} + RI = U_0 \sin\omega t$$

$$\dot{I} + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin\omega t$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$I_h(t) = C e^{-\frac{R}{L}t}$$

Partikuläre Lösung: Ansatz

$$I_p(t) = C_2 \sin(\omega t - \gamma)$$

Allgemeine Lösung

$$I(t) = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\sin(\omega t - \gamma) + D e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$\tan\gamma = \frac{\omega L}{R}$$

Technisch: TP_1-Glied / Tiefpaß erster Ordnung

4. Bernoulli Gleichung

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)\left(y(t)\right)^{\alpha} = 0$$

$$\alpha \neq 0 \, , \, \alpha \neq 1$$

DGL
NICHTLINEAR
ERSTER ORDNUNG

Substitution

$$u(t) = y(t)^{1-\alpha}$$

$$u'(t) = (1-\alpha)\, y(t)^{-\alpha}\, y'(t)$$

$$= (1-\alpha)\, y(t)^{-\alpha}\left(-a(t)y(t) - b(t)(y(t))^{\alpha}\right)$$

$$= (1-\alpha)(-a(t))\, u(t) - (1-\alpha)\, b(t)$$

$$u'(t) + (1-\alpha)a(t)u(t) = (\alpha-1)\, b(t)$$

DGL
LINEAR
INHOMOGEN
ERSTER ORDNUNG

BEISPIEL:

$$y' = y + t y^2 \longrightarrow \quad \alpha = 2 \quad a(t) = -1 \quad b(t) = -t$$

SUBSTITUTION

$$u'(t) + u(t) = -t \qquad u(t) = Ce^{-t} + (1-t)$$

RÜCKSUBSTITUTION

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + Ce^{-t}}$$

DEFINITIONSBEREICH VON LÖSUNGEN VON DGL's

$$y' = f(t,y) \qquad f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$y(t_0) = y_0 \qquad f \text{ stetig}$$

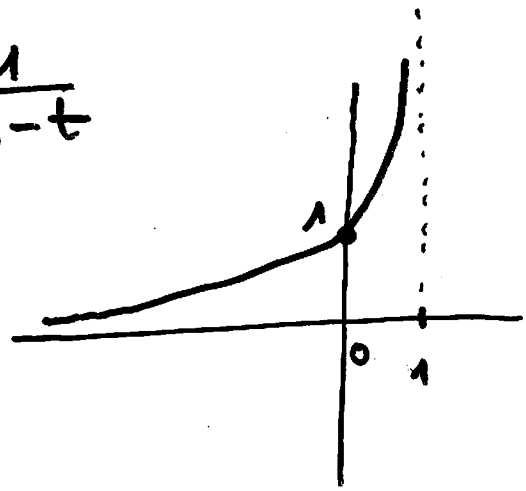
Definitionsbereich einer Lösung muß nicht ganz $\mathbb{R}$ sein!

$$y' = y + ty^2 \longrightarrow y(t) = \frac{1}{1-t+Ce^{-t}} \qquad C\in\mathbb{R}$$

$$y(0) = 1 \implies y(0) = \frac{1}{1+C} = 1 \implies C = 0$$

$$y(t) = \frac{1}{1-t}$$

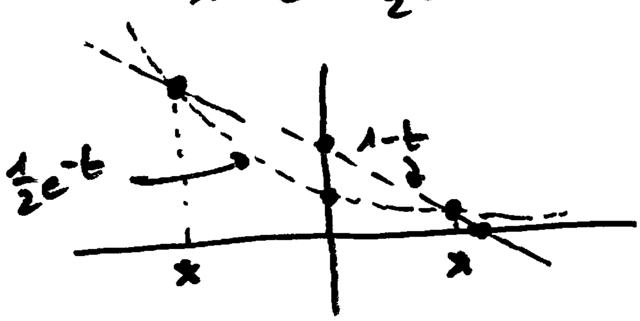
Definitionsbereich nicht ganz $\mathbb{R}$

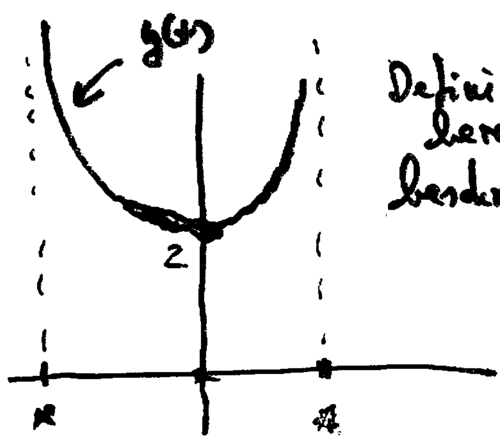


$$y(0) = 2 \implies y(0) = \frac{1}{1+C} = 2 \implies C = -\frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{1-t-\frac{1}{2}e^{-t}}$$

$$1-t-\tfrac{1}{2}e^{-t} = 0$$
$$1-t = \tfrac{1}{2}e^{-t}$$





Definitionsbereich beschränkt

5. Ricatti - DGL

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

Es sei <u>eine</u> Lösung y_p bekannt

Mit dem Ansatz

$$\underline{y(t)} = v(t) + y_p(t)$$

entsteht eine Bernoulli DGL

$$y'(t) = v'(t) + y_p'(t)$$

$$a(t)y(t) = a(t)(v(t) + y_p(t))$$

$$b(t)y^2(t) = b(t)(v(t)^2 + 2v(t)y_p(t) + y_p^2(t))$$

$$\underbrace{y_p'(t) + a(t)y_p + b(t)y_p^2}_{c(t)} + v'(t) + v(t)(a(t) + 2b(t)y_p(t)) + b(t)v(t)^2 = \underline{c(t)}$$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{gathered} v'(t) + v(t)(a(t) + 2b(t)y_p(t)) + b(t)v^2(t) \overset{!}{=} 0 \\ \text{(Bernoulli)} \end{gathered}}$$

$u = \frac{1}{v}$ $\longrightarrow$ lineare DGL. in u

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]\,u(t) = b(t)$$

6. EXAKTE DGL's

$$g(t,y) + h(t,y)y' = 0 \qquad (*)$$

g und h aus $C^1(D)$, D einfach zusammenhängend

$(*)$ heißt exakte DGL, wenn

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t,y) \qquad (**)$$

Gilt $(**)$ dann existiert eine Funktion $\Phi(t,y)$ (Potential) mit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g(t,y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h(t,y)$$

Es sei $y(\cdot)$ Lösung von $(*)$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,y(t)) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t,y(t))y'(t)$$

$$= g(t,y(t)) + h(t,y(t))y'(t) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \Phi(t,y(t)) = \text{Const!}$$

Exakte DGL's stehen im Zusammenhang mit Erhaltungsgrößen !!!

Beispiel

$$y' = -\frac{t}{y} \quad \rightsquigarrow \quad y y' = -t$$

$$\underbrace{t}_{g(t,y)} + \underbrace{y y'}_{h(t,y)} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 - \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{exakt}$$

$\Longrightarrow$ $\exists$ Potential $\Phi(t,y)$

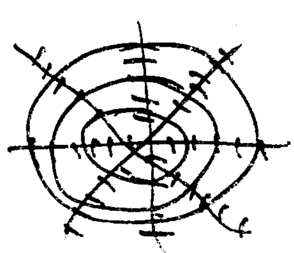
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g(t,y) = t \quad \Longrightarrow \quad \Phi = \frac{1}{2}t^2 + C(y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = C'(y) = y \quad \Longrightarrow \quad C(y) = \frac{1}{2}y^2$$

$\Longrightarrow$

$$\Phi(t,y) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}y^2$$

$$\Phi(t,y(t)) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{Const!}$$



Beispiel

$$\underbrace{(1+2ty+y^2)}_{g(t,y)} + \underbrace{(t^2+2ty)}_{h(t,y)}y' = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2t+2y \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = 2t+2y \quad (**)$$

(*) ist exakt.

Wegen (**) existiert $\phi(t,y)$ mit

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 1+2ty+y^2 \implies \phi(t,y) = (1+y^2)t + t^2 y + C(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2yt + t^2 + C'(y) \overset{!}{=} t^2+2ty$$

$$\implies C'(y) = 0 \implies C(y) = D \text{ konst.}$$

$$\implies \phi(t,y) = (1+y^2)t + t^2 y$$