VORLESUNG DGL I

TAUBERT

Erinnerung

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$n = 1$

Elementare Lösungsmethoden

- Separierbar $\qquad y' = f(t)\, g(y)$
- Homogen $\qquad y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$
- Lineare (erster Ordnung) $\qquad y' + a(t) y = b(t)$
- Bernoulli $\qquad y' + a(t) y + b(t) y^{\alpha} = 0$
- Ricatti $\qquad y' + a(t) y(t) + b(t) y^2(t) = c(t)$
- Exakte $\qquad g(t, y) + h(t, y) y' = 0$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

DGL's

Ricatti

$\downarrow$ $u = y + y_p$

Bernoulli

$\downarrow$ $u = y^{1-\alpha}$

Linear

$\nearrow$ (Variation der Konstanten)
Linear (inhomogen)

$\searrow$ Linear (homogen)
(Lösung hinschreiben)

$\swarrow$

Exakt $\leftarrow$ Separierbar $\leftarrow$ homogen

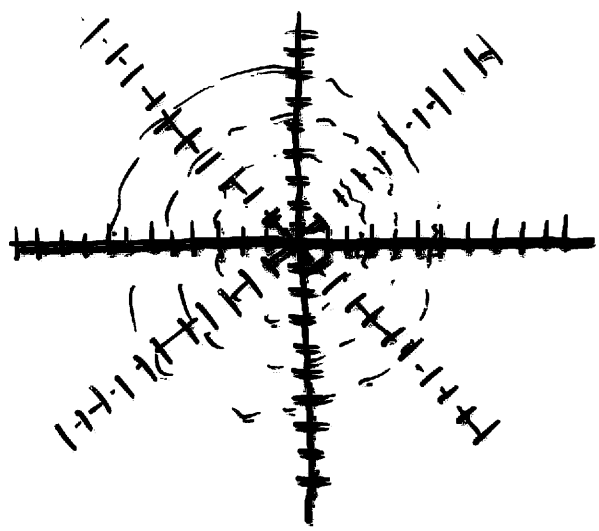
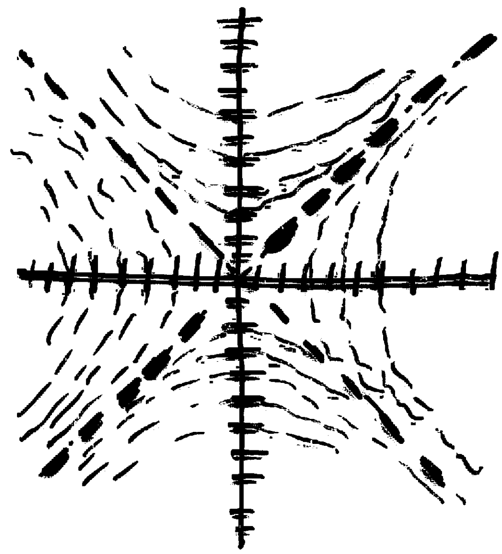
Exakt $\downarrow$ (Potential finden)

Separierbar $\downarrow$ (Trennung der Variablen)

Lösung Lösung

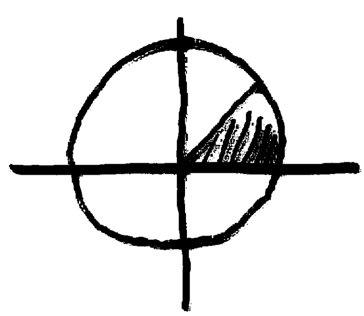
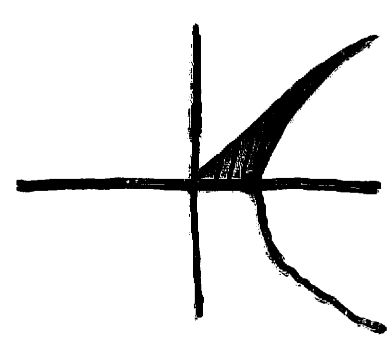
2c

$y' = -\frac{x}{y}$ $\qquad\qquad$ $y' = +\frac{x}{y}$

separierbar
(exakt)

$x^2 + y^2 = 1 \ (c^2)$ $\qquad\qquad$ $x^2 - y^2 = 1 \ (c^2)$

$x = \cos t$
$y = \sin t$

Parameterdarstellung der Lösung

$x = \cosh a$
$y = \sinh a$

$F = \frac{1}{2} t$ $\qquad\qquad$ $F = \frac{1}{2} a$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \longrightarrow \cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$

RICATTI !!!

Bemerkungen :

Jede separierbare DGL ist exakt

$$y' = f(t)\, g(y)$$

$$\rightsquigarrow \quad f(t) - \frac{1}{g(y)}\, y' = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{g(y)}\right) \quad !!! \right)$$

→ Ricatti, Jacopo Francesco 1676 – 1754

→ Bernoulli, Jacob 1654 – 1704

Die Familie Bernoulli

Die Zeit etwa zwischen 1620 und 1740 bringt auch in der Mathematik zwei wichtige Momente der Umgestaltung, die bis heute bedeutungsvoll sind. Zum einen die Verschmelzung geometrischer und algebraischer Methoden, wie wir sie noch verstärkt in der Analytischen Geometrie in der Kollegstufe kennen lernen werden. Zum anderen die Entwicklung und Herausbildung der infinitesimalen Methoden der Differential- und Integralrechnung. Über die beiden herausragendsten Mathematiker dieser Zeit - Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz - haben wir schon in vorausgegangenen Referaten gehört. Im Briefwechsel von Leibniz taucht als Absender immer wieder der Name Bernoulli auf. Dieser Name wird uns auch in der Stochastik in der Kollegstufe häufiger begegnen. Nun dürfen wir diesen Namen aber nicht mit einer Person gleichsetzen. Gleich vier Bernoullis taten sich als große Mathematiker dieser Zeit hervor. Die Verwandtschaftsverhältnisse sind aus der Folie zu erkennen.
Ich möchte sie Ihnen kurz vorstellen und auf ihre wichtigsten Erkenntnisse eingehen.

Jacob Bernoulli (* 1654 in Basel , + 1705 in Basel)

- 1671 Magister der Philosophie
- 1676 Lizentiat der Theologie
- 1677 - 1680 Aufenthalt in Frankreich. Er widmet sich der Gnomontik, der Lehre der Sonnenuhren und verfasst die "Tabulae gnomonicae universalis"
- schon während des Studiums großes Interesse an der Astronomie
- 1681 Veröffentlichung seiner ersten wissenschaftlichen Arbeit: Anleitung zur Berechnung von Kometenbahnen
- 1681 - 82 Studienaufenthalt in den Niederlanden und in England
- 1683 hält er private Vorlesungen über Experimentalphysik
- 1685 veröffentlicht er ein erstes Problem zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

- 1687 wird er Professor für Mathematik an der Universität in Basel. Zusammen mit seinem Bruder Johann ist er ein eifriger Verfechter des Leibniz'schen Infinitesimalkalküls. Sie erkennen die Bedeutung des Rechnens mit dem " unendlich-kleinen " und wenden diese Methode bei vielen geometrischen und physikalischen Problemen an, ohne lange darüber zu philosophieren. Jacob fand unter anderem Lösungen zur stetigen Verzinsung und gab die Differentialgleichung für das Leibniz'sche Isochronenproblem an. Hierbei wurde das Wort "Integral" zum ersten Mal in unserem heutigen Sinn (siehe Kollegstufe) verwandt.
- 1689 - 1704 Arbeiten aus der Reihenlehre
- 1695 legte er die Bernoullische Differenzialgleichung vor, die sein Bruder Johann löste.
1697 regte Jacobs Bruder Johann, wie es damals so üblich war, einen Wettstreit aller Mathematiker zur Lösung eines geometrischen Problems mit den Worten an: " An die scharfsinnigsten Mathematiker, die auf dem ganzen Erdkreis blühen... ."

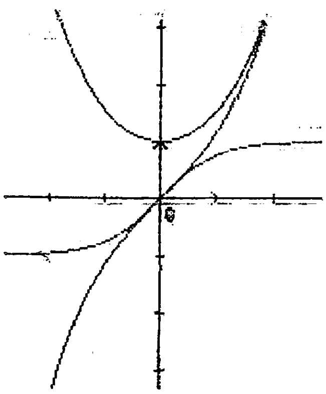
Aufgabe: Ein Punkt A soll mit einem in derselben Vertikalebene befindlichen Punkt B derart durch eine Kurve verbunden werden, dass ein längs dieser Kurve herabgleitender schwerer Punkt in möglichst kurzer Zeit von A nach B gelangt.

Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz und der Marquis de l`Hospital sandten richtige Lösungen ein. Aus Jacobs Lösung entwickelte sich die Variationsrechnung.
- Die nach Jacob Bernoulli benannte Bernoullische Ungleichung findet sich schon in einer Arbeit von Isaac Barrows.
- 1699 wurden die Brüder Jacob und Johann in die Academie Royale de Sciences von Paris , 1701 in die Societät der Wissenschaften von Berlin aufgenommen.
- 1703 - 04 Briefwechsel mit Leibniz über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Grundgedanken der Fehlertheorie
- 1713 nach seinem Tod gedrucktes Werk: "Ars conjectandi" enthält z.B. Bernoulli-Zahlen (Koeffizienten der Bernoulli-Polynome) Das Bernoulli-Theorem ("Gesetz der großen Zahlen "). Damit förderte er die Wahrscheinlichkeitslehre und wurde zum Begründer der modernen Statistik.

Johann Bernoulli (* 1667 in Basel , + 1748 in Basel)
- sollte Kaufmann werden
- durfte doch Medizin studieren
- studierte nebenbei bei seinem Bruder Jacob Mathematik
- 1694 Doktor der Medizin
- 1695 Professor der Mathematik in Groningen
- 1705 folgt er seinem verstorbenen Bruder auf den Lehrstuhl für Mathematik in Basel. Er galt als einer der bedeutendsten europäischen Wissenschaftler seiner Epoche (Lehrer von Leonhard Euler und dem Marquis de l`Hospital). Entzweite sich mit seinem Bruder
- Grund: wissenschaftlicher Wettstreit (über das Brachistochronen-Problem)
- schrieb Arbeiten zur Theorie der Differentialgleichung, über das Prinzip der lebendigen Kräfte, den Impulserhaltungssatz
- 1718 verwendete er das 1692 von Leibniz erfundene Wort "Funktion" in der heutigen Bedeutung
- er untersucht Flugkurven in der Ballistik und Brennlinien in der Optik
- 1738 - 40 Werk "Hydraulica" Fließverhalten von Flüssigkeiten aus Gefässen verschiedenen Quer- Schnitts, Kanälen und Röhren

Daniel Bernoulli (* 1700 in Groningen , + 1782 in Basel) Sohn von Johann Bernoulli

RICATTI Jacopo Francesco
italien, 1676-1754



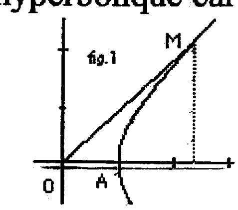
Physicien à Venise. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre *Opere del conte Jacopo Ricatti.*

Outre sa célèbre équation, on lui doit aussi, indépendamment du suisse Lambert, le développement de la trigonométrie hyperbolique en définissant le cosinus hyperbolique cosh (ou ch) et sinh (ou sh) :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}\ ,\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

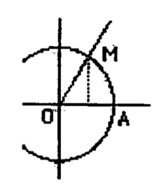
Les appellations sont dues à Lambert. Cette trigonométrie fut dénommée hyperbolique car

$$ch^2\, x - sh^2\, x = 1$$



formule obtenue par Ricatti, et $x^2 - y^2 = 1$ est l'équation, dans un repère orthonormé, d'une hyperbole équilatère. Les fonctions trigonométriques classiques, dites circulaires, sin et cos, vérifient :

fig.2



$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

sur le cercle unité (cercle trigonométrique) d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

- Considérons un point M de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ (fig.1) avec A(1,0). Puisque $x > 1$, il existe $a > 0$ tel que $x = ch\ a$. Par suite, les coordonnées de M sont (ch a, sh a) car $ch^2\, x - sh^2\, x = 1$.
- Dans le cas du cercle unité d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (fig.2) , si M est un point du cercle d'angle polaire a radians, les coordonnées de M sont (cos a, sin a) : nous sommes passés des fonctions *hyperboliques* aux fonctions *circulaires*.

---

du premier ordre de la forme :

$$y' = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$$

Cette difficile équation fut résolu partiellement par son auteur et par les ,
tout particulièrement). s'y attela aussi. Lorqu'une solution particulière de cette équation est connue, en posant $y = z + y_1$ elle se ramène à une équation de
que l'on intègre en se ramenant à une équation linéaire par un nouveau changement de variable $u = 1/z$.

DGL's ZWEITER ORDNUNG

DREI (BESONDERE) FÄLLE

DGL's ORDNUNG 2		
$y'' = f(t, y')$	$y'' = f(y, y')$	$y'' = f(y)$
nicht autonom nicht abhängig von y	autonom	autonom nicht abhängig von y'

→ Methode:

Reduktion auf <u>skalare</u> DGL erster Ordnung

1. Fall

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

$$z(t) = y'(t) \quad \rightsquigarrow \quad z'(t) = f(t, z(t))$$

(Ordnung 1)

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(s)\,ds$$

<u>Beispiel</u>

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

Suche radialsymmetrische Lösung

$$u(x,y,z) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) =. u(r)$$

$$\rightsquigarrow \quad u''(r) + \frac{2}{r}u'(r) = 0$$

$$\rightsquigarrow \quad z'(r) = -\frac{2}{r}z(r)$$

Typ: Separierbare Variablen

$$\frac{dz}{dr} = -\frac{2}{r}z \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{2\,dr}{r}$$

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dy}{y} = -2\int_{r_0}^{r} \frac{ds}{s}$$

$$\ln\left|\frac{z}{z_0}\right| = 2\ln\left|\frac{r_0}{r}\right| \quad \rightsquigarrow \quad z(r) = K\frac{1}{r^2}$$

$$y(r) = C_0 + C_1\frac{1}{r}$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

$$u(r(x,y,z)) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_r r_x \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{rr} r_x^2 + u_r r_{xx}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_r r_y \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{rr} r_y^2 + u_r r_{yy}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u_r r_z \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{rr} r_z^2 + u_r r_{zz}$$

$$\longrightarrow u_{rr}(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) + u_r(r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}) = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot x = \frac{x}{r} \longrightarrow \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = -\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

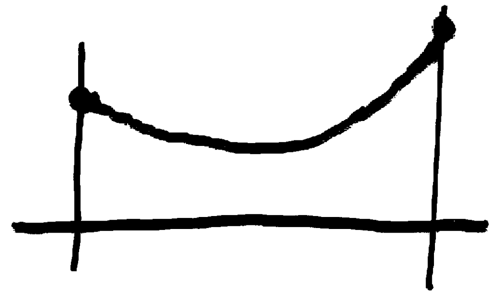
$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = -\frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = -\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

$$u_{rr}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) + u_r\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3} + \frac{3}{r}\right) = 0$$

$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = 0$$

Beispiel : Kettenlinie



$$y''(x) = k\sqrt{1+y'^2(x)} \qquad k = k(\ell, \cdots)$$

$$z' = k\sqrt{1+z^2}$$

RICATTI

$$z(x) = \sinh(kx+C_1)$$

$$z'(x) = k\cosh(kx+C_1) = k\sqrt{1+\sinh^2(kx+C_1)}$$

$$= k\sqrt{1+z^2}$$

$$\longrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{k}\cosh(kx+C_1)+C_2$$

Ausrechnen (Separierbar)

$$\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = k\,dt \qquad \int_{z_0}^{z}\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = k\int_{t_0}^{t} ds$$

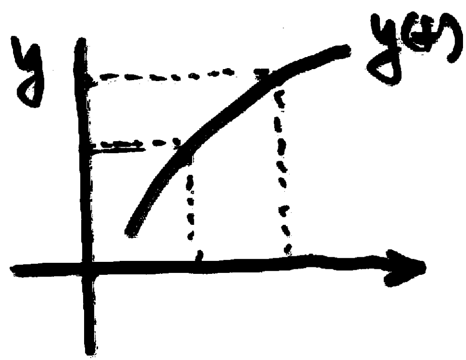
$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

2. Fall

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Idee: Elimination von t durch $t = t(y)$

$y(\cdot)$ sei Lösung
$y(\cdot)$ streng monoton



$y(t) \longrightarrow t(y)$
möglich!

Beachte: $y(t(y)) = y$ $\quad \frac{d}{dy}$: $\quad \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dy} = 1$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{1}{y'(t)} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Setze $\qquad v(y) := y'(t(y))$

$$v_y = y''(t(y))\frac{dt}{dy} = y''(t(y))\frac{1}{y'(t(y))} \overset{!}{=} f(y,v)\frac{1}{v}$$

$$y''(t) = f(y(t), y'(t)) \longrightarrow v_y = f(y,v)\cdot\frac{1}{v}$$

Rücktransformation: DGL 1. Ordnung

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \longrightarrow t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{du}{v(u)}$$ nach y auflösen!

$$y'' = f(y,y') \rightsquigarrow v_y = f(y,v)\frac{1}{v}$$

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dt} = v(y)$$

Beispiel

$$y'' = f(y,y') = -y \rightsquigarrow v_y = -y/v$$

Alte Bekannte

exakt

~~homogen~~

separierbar

$$v(y) = \pm\sqrt{r^2 - y^2} \longleftarrow y^2 + v^2 = r^2$$

$$\frac{dy}{dt} = v(y) \qquad \text{separierbar}$$

Besser: Alter Trick, Ansatz

$$y = A\sin(t-\gamma)$$

$$\frac{dy}{dt} = A\cos(t-\gamma) = \sqrt{A^2 - A^2\sin^2(t-\gamma)} = \sqrt{A^2 - y^2}$$

3. Fall

$$y'' = f(y)$$

Idee: Reduktion der Ordnung durch Multiplikation mit y'

$$y''(t) = f(y(t)) \rightsquigarrow y''(t)\,y'(t) = f(y(t))\,y'(t)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}y'^2(t) = \frac{d}{dt}F(y(t))$$

F Stammfunktion zu f

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{2}y'^2(t) = F(y(t)) + C$$

$$y'(t) = \pm\sqrt{2F(y(t)) + C}$$

Beispiel (Pendelgleichung)

$$y'' + \gamma \sin y = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}y'^2 - \frac{d}{dt}\gamma\cos y = 0$$

$$\frac{1}{2}y'^2 = \gamma\cos y + C$$

Bei Auflösung nach t $\longrightarrow$ Elliptische Integral

Existenzsatz von Peano (1890)

Sei $f(t,y)$ stetig auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, und sei $(t_0, y_0) \in D$.

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

$$f : D \to \mathbb{R}^n \qquad D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

im Intervall $|t - t_0| < \varepsilon$ eine Lösung besitzt

Bemerkungen

- Keine Eindeutigkeit
- ε kann sehr klein sein
- es gibt ein maximales Existenzintervall

$$-\infty \leq t_{min} < t < t_{max} \leq \infty$$

und

$\underbrace{(t, y(t))}_{\in D}$ kommt für $t \to t_{min}$, $t \to t_{max}$ ∂D beliebig nahe

Bemerkungen zu dem Satz

$$Q = \{(t,y) \mid |t-t_0| \le a,\ \|y-y_0\| \le b\}$$

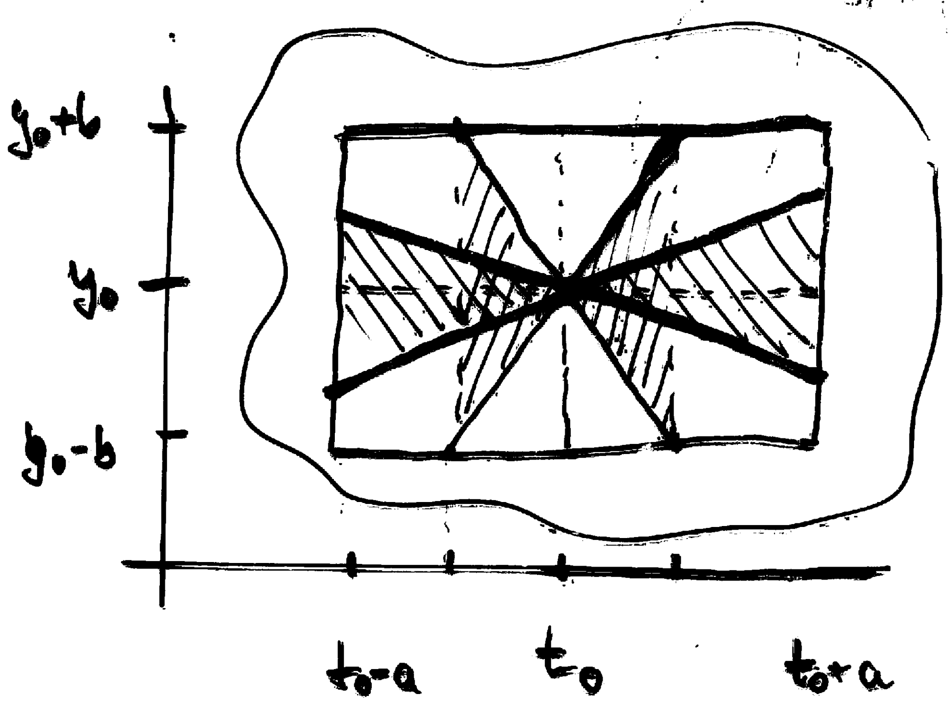
$$Q \subset D \qquad \text{Quader}$$

$(\Longrightarrow)$ Es sei $\|f(t,y)\| \le M \quad \forall (t,y) \in Q$

Dann existiert die Lösung für alle $|t-t_0| \le \alpha$

$$\alpha = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

Dieses macht klar:



PEANO Giuseppe
italien, 1858-1932

Ce célèbre mathématicien italien, également linguiste (il tenta de faire ratifier une langue internationale proche du latin), professa le calcul infinitésimal (calcul différentiel et calcul intégral) à l'Académie militaire de Turin mais ses travaux portent essentiellement sur la , la théorie des ensembles, l'axiomatisation de l'ensemble des entiers naturels.

On lui doit la création d'un système de notations susceptibles d'énoncer et de démontrer les propositions mathématiques en utilisant un minimum de signes compatibles avec le raisonnement déductif reposant sur des notions premières acceptées (axiomes). Il usa le premier des notations ensemblistes **N** pour les nombres entiers naturels (*naturale*), **Q** pour les -les fractions- autrement dit les quotients (*quoziente*). On lui doit aussi (1888) la notion d' (réel) abstrait généralisant les travaux de sur le calcul vectoriel (appelé à l'époque).

C'est Otto Töplitz (1881-1940), élève de à qui donnera la définition axiomatique d'un sur un abstrait.

On lui doit :

- les symboles ensemblistes ∈ , ⊂ , ∩ , ∪, (en fait, le signe ⊂ , que notait simplement <, est plus sûrement dû à , le signe ⊃ de Peano signifiait aussi, et signifie encore, l'implication logique). A ⊂ B exprime que tout élément de A est aussi un élément de B; par exemple : **Z** ⊂ **Q** ⊂ **R**.
- faisant suite aux travaux de , une construction de l'ensemble des entiers naturels et la notion moderne de suite numérique en tant qu'application de **N** dans **R** et la notion rigoureuse de raisonnement "par récurrence", dans le cadre de la logique des *prédicats*, compte tenu de son :

La logique propositionnelle de l'algèbre de ne peut suffire au raisonnement mathématique : il lui manquait les indispensables (et désormais célèbres) quantificateurs :

Beweis des Satzes (Idee)

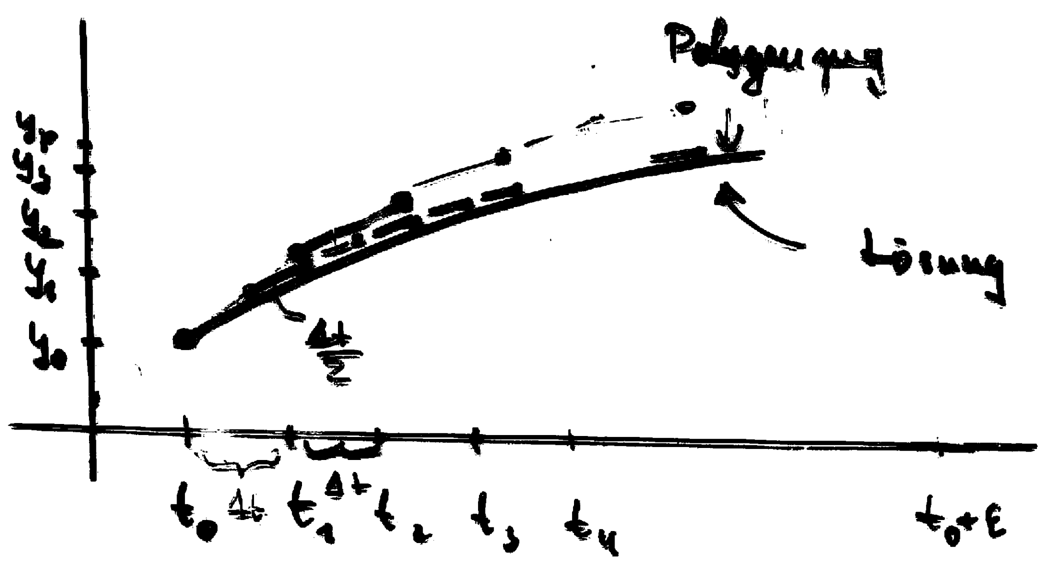
$$y'(t) = f(t, y(t)) \;, \qquad y(t_0) = y_0$$

$$\cancel{\lim_{\Delta t \to 0}} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \cong f(t, y(t))$$

$$y(t+\Delta t) \cong y(t) + \Delta t\, f(t, y(t))$$

Vorschrift bzw. Verfahren (Euler'sches Polygonzugverfahren)
($\Delta t > 0$ fest)

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t\, f(t_n, y_n) \qquad \begin{array}{l} t_n = t_0 + n\Delta t \\ y_0 = y(t_0) \end{array}$$



mit $\Delta t \to 0$ Polygonzüge $\longrightarrow$ $y(\cdot)$ = Lösung

Beispiel

$$y'(t) = y(t), \qquad y(0) = y_0 = 1$$

Näherungslösung an der Stelle $a > 0$ gesucht

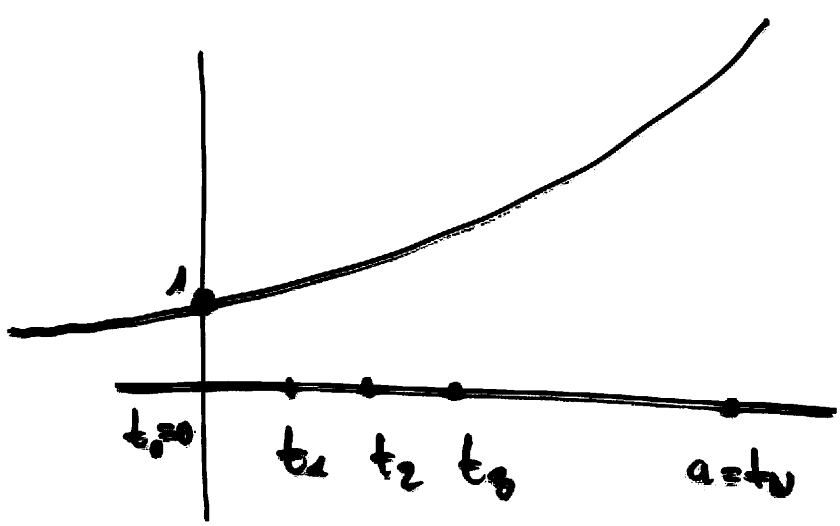
$$\Delta t = \frac{a}{N}, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$y_1 = y_0 + \Delta t\, y_0 = (1+\Delta t)\, y_0$$

$$y_2 = y_1 + \Delta t\, y_1 = (1+\Delta t)\, y_1 = (1+\Delta t)^2 y_0$$

$$\vdots$$

$$y_N = y_{N-1} + \Delta t\, y_{N-1} = (1+\Delta t)^N y_0$$



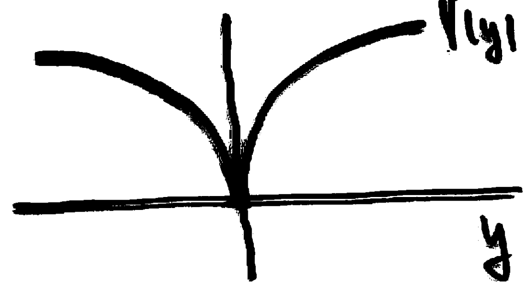
$$y_N = \left(1+\frac{a}{N}\right)^N y_0 \xrightarrow[N\to\infty]{} e^a$$

Eindeutige Lösbarkeit einer AWAde ?

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad y(0) = 0$$

$f(t,y) = \sqrt{|y|}$ stetig !

$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



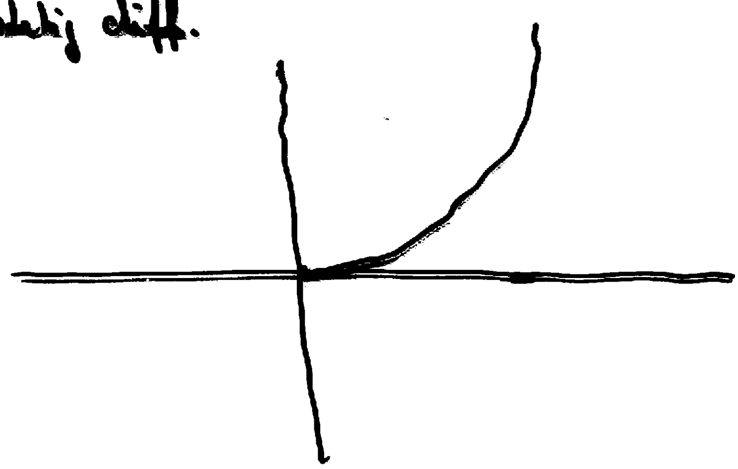
Betrachte

$$y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$y'(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \text{stetig !}$$

$y(\cdot)$ genügt der Anfangswertaufgabe !!!

stetig diff.



$$y(t) = \begin{cases} \frac{(t-a)^2}{4} & t \geq a > 0 \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Auch Lösung !!

Welche Zusatzforderung für eindeutige Lösbarkeit ?

Existenzsatz von Picard-Lindelöf (1894)

Sei $f(t,y)$ stetig auf

$$Q = \{(t,y) \in \mathbb{R}^{1+n} \mid |t-t_0| \leq a \quad \|y-y_0\| \leq b\}$$

und

$$\|f(t,y)\| \leq M \quad \forall (t,y) \in Q$$

$$\underline{\|f(t,\tilde{y}) - f(t,y)\| \leq L\|\tilde{y}-y\|} \quad \forall (t,y),(t,\tilde{y}) \in Q$$

Dann hat die AWA

$$y'(t) = f(t,y(t)) \ , \quad y(t_0) = y_0$$

eine <u>eindeutige</u> Lösung, die mindestens im Intervall

$$t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \quad \varepsilon = \min\left(a, \underline{\frac{b}{M}}\right)$$

definiert ist!