VORLESUNG DGL I 23.11.2007

TAUBERT

# Systeme von linearen DGL's

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

$A(t)$, $h(t)$ <u>stetige</u> Funktionen auf Intervall $I$
(bzw. ganz $\mathbb{R}$)

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad h(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

$$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad h : I \to \mathbb{R}^n, \quad y : I \to \mathbb{R}^n$$

Über die Lösungen wissen wir:

- zu jedem $y(t_0) = y_0$ existiert eine Lösung
- Lösungen sind auf ganz $I$ definiert
- Lösung zu $y(t_0) = y_0$ ist eindeutig

## Aufgabe

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

$$t \in I$$

Erinnerung

Gesucht sind stetig differenzierbare Funktionen

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

mit

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t) \qquad \forall\, t \in I$$

**Beispiel**

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix} y(t), \qquad t > 0$$

Eine Lösung auf $I = (0, \infty)$ mit $y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist

$$y(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix}$$

Beachte: $A(t)$ nur für $t \neq 0$ definiert

$$y_1'(t) = \frac{1}{t} y_1(t) - y_2(t) \quad \sim \quad 2t = \frac{1}{\cancel{t}} t^{\cancel{2}} - (-t) = 2t$$

$$y_2'(t) = \frac{1}{t^2} y_1(t) + \frac{2}{t} y_2(t) \quad \sim \quad -1 = \frac{1}{\cancel{t^2}} \cancel{t^2} + \frac{2}{\cancel{t}} (-\cancel{t}) = -1$$

?? Wie finde ich *alle* Lösungen von ??

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

## Struktursatz für lineare Systeme

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = A(t)\,y + h(t)$$

besitzt die Darstellung

$$y(t) = \underline{y_p}(t) + y_h(t)$$

Dabei ist $y_h(t)$ die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Gleichung

$$\underline{y' = A(t)\,y}$$

und $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y' = A(t)\,y + h(t)$$

Fazit: Alle Lösungen von $y' = A(t)\,y + h(t)$ gesucht!

1. Finde *alle* Lösungen von $y'(t) = A(t)\,y(t)$
2. Finde *eine* Lösung von $y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$

# BEMERKUNG

Die allgemeine Lösung $y$ der Gleichung

$$y' = A(t)\, y + h(t), \quad t \in I$$

oder alle Lösungen $y$ von

$$y' = A(t)\, y + h(t), \quad t \in I$$

sind dadurch gegeben, dass es in der Menge

$$y : I \to \mathbb{R}$$

stets eine (eindeutige) Lösung mit $y(t_0) = y_0$

für beliebig vorgegebene $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$

gibt.

$$y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$$

Bsh: Allgemeine Lösung: $\quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

allgemeine Lösung der hom. Gl.

Beweis:

$y_h(t)$ und $y_p(t)$ gegeben $\Longrightarrow$ $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

allgemeine Lösung der inhom. Gl.

$y(t)$ allgemeine Lösung und $y_p$ spezielle Lösung

$$\Longrightarrow \quad y(t) = \underbrace{y(t) - y_p(t)}_{\text{allgemeine Lösung von } y' = A(t)y} + y_p(t)$$

Erinnerung $(n=1)$

$y'(t) = a(t)y(t) + h(t) \qquad a(t), h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

1. Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

2. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

ANSATZ $\longrightarrow$ VARIATION DER KONSTANTEN

$$y_p(t) = C(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds}$$

$$\longrightarrow \quad C(t) = \int_{t_0}^{t} h(\tau) e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(s)\,ds}\, d\tau$$

Wie kann ich "prinzipiell" die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = A(t)\, y$$

ermitteln?

Beispiel (illustratives)

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & b(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

Die Anfangsbedingungen $y^1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y^2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ führen zu

$$y^1(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^2(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\int_{t_0}^{t} b(s)\,ds} \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ Allgemeine Lösung $\longleftarrow$

$$y(t) = c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t)$$

oder

$$y(t) = \left( y^1(t) \;\vdots\; y^2(t) \right) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

2x2 Matrix

$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Konstruktionsprinzip für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y' = A(t)\, y$$

a) Wähle ein $t_0$ und ein System von linear unabhängigen Vektoren

$$(v^1, v^2, \dots, v^n)$$

aus $\mathbb{R}^n$. z.B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

b) Löse die AWAen ($n$ Stück)

$$y^{k\prime}(t) = A(t)\, y^k(t) \,, \quad y^k(t_0) = v^k$$

$$y(t) = c_1 y^1(t) + \dots + c_n y^n(t) \quad \text{allgemeine Lösung}$$

$$c_i \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y'(t) = A(t)\,y(t)$$

c) Fasse die $n$ gefundenen Lösungen $y^k(t)$ in eine Matrix

$$Y(t) = (y^1(t), \dots, y^n(t))$$

zusammen.

Matrix $Y$ heißt <u>Fundamentalsystem</u> oder <u>Fundamentalmatrix</u> zu $y' = A(t)y$ und genügt der <u>Matrixanfangswertaufgabe</u>

$$Y'(t) = A(t)Y(t) \quad Y(t_0) = (v^1, \dots, v^n)$$

Satz

Sei $Y(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem von $y' = A(t)y$. Dann gilt:

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist

$$y_h(t) = Y(t)\,c = \sum_{k=1}^{n} c_k y^k(t) \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Die Fundamentalmatrix ist für alle $t$ regulär

$n \geq 2$ ??

- Für nicht konstante Matrizen $A(t)$ wird es i.a. <u>nicht</u> möglich sein, die Lösungen von
$$y'(t) = A(t)y(t) \qquad y(t_0) = y^i$$
explizit anzugeben

Hilfreich kann sein:

- Eine spezielle Form von $A(t)$
- → Raten
- → Reduktion der Anzahl der Gleichungen
- → Potenzreihenansätze

$$y_1(t) = a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + \dots$$
$$y_2(t) = a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + \dots$$
$$\vdots$$
$$y_n(t)$$

⊙ Ist $A(t) = A$ eine konstante Matrix, dann <u>kann</u> alles sehr viel einfacher sein.

## Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

a) Basis aus $\mathbb{R}^2$ vorgeben, z.B. $v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Löse

- $y^{1\prime}(t) = A(t)\, y^1(t) \qquad y^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $y^{2\prime}(t) = A(t)\, y^2(t) \qquad y^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$y^{1\prime}(t) = A(t)\, y^1(t) \iff \begin{array}{l} y_1^{1\prime}(t) = t\, y_1^1(t) \\ y_2^{1\prime}(t) = 2t\, y_2^1(t) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} y_1^1(0) \\ y_2^1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} y_1^1(t) = e^{t^2/2} \\ y_2^1(t) = 0 \end{array}$$

$$y^{2\prime}(t) = A(t)\, y^2(t) \quad \begin{pmatrix} y_1^2(0) \\ y_2^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{array}{l} y_1^2(t) = 0 \\ y_2^2(t) = e^{t^2} \end{array}$$

c)

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 0 \\ 0 & e^{t^2} \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Y(t)\, c = c_1 \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t^2} \end{pmatrix}$$

## Beispiel

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 0 \\ 0 & 0 & 3t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

$$v^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) $\left\{ \begin{aligned} y_1^{1\prime}(t) &= t y_1^1(t) \\ y_2^{1\prime}(t) &= 2t y_2^1(t) \\ y_3^{1\prime}(t) &= 3t y_3^1(t) \end{aligned} \right.$ $\quad y_1^1(0) = 1 \quad y_2^1(0) = 0 \quad y_3^1(0) = 0 \quad$ $y_1^1(t) = e^{t^2/2} \quad y_2^1(t) = 0 \quad y_3^1(t) = 0$ $\quad y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2 $\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

3 $\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad y^3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix}$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2/2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{3}{2}t^2} \end{pmatrix}$$

$y(t) = Y(t)c \qquad$ allgemeine Lösung

## Beispiel

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

a. Basis $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $t_0 = 0$

b. Löse

1) $y_1'(t) = y_2(t)$
$y_2'(t) = -y_1(t) + t y_2(t)$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $y_1'(t) = y_2(t)$
$y_2'(t) = -y_1(t) + t y_2(t)$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Raten:

1) $y_2 \equiv 0 \Rightarrow y_1 = 1 \Rightarrow$ Widerspruch!
(Raten nicht geklappt!)

Raten

2) $y_2 \equiv 1 \underset{(1)}{\Rightarrow} y_1(t) = t + c \underset{(2)}{\Rightarrow} c = 0$

$\Rightarrow$ Eine Lösung gefunden !!!

$$y^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wie finde ich eine zweite (unabhängige) Lösung ???

Wie finde ich eine zweite (linear unabhängige) Lösung?

→ Reduktionsverfahren (für 2×2 Systeme) ←

$$y' = A(t)\, y$$

Lösung $y^{2\prime} = A(t)\, y^2$ mit (OE) $y_2^2 \neq 0$ bekannt

**Ansatz**

$$y(t) = \underline{w(t)}\, y^2(t) + \underline{z(t)}$$

mit unbekannten Funktionen $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$

$$y' = w' y^2 + w\, y^{2\prime} + z'(t)$$

$$= w' y^2 + w A y^2 + z' \underset{\text{Forderung}}{\overset{!}{=}} A y$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{z'(t)} = A(y - w y^2) - w' y^2$$

$$z'(t) = A z(t) - w' y^2$$

Lineare inhomogene Gleichung ???

$$z_1' = a_{11} z_1 + a_{12} \cancel{z_2} - w' y_1^2$$

$$\cancel{z_2'} = a_{21} z_1 + a_{22} \cancel{z_2} - w' y_2^2$$

Erleuchtung : $z_2 \equiv 0$ !!!

Nochmal :

$$y' = A(t)\, y \qquad y^{2\prime} = A(t)\, y^2 \qquad y^2_2 \neq 0$$

Ansatz
$$y(t) = w(t)\, y^2(t) + z(t)$$

$$z_1' = a_{11} z_1 + a_{12} z_2 - w' y^2_1$$
$$z_2' = a_{21} z_1 + a_{22} z_2 - w' y^2_2$$

Jetzt :
$$z_2 \equiv 0$$

$\Longrightarrow$ (reine Integration) $\quad w' = a_{21} \dfrac{z_1}{y^2_2}$

$\Longrightarrow$ (linear homogen) $\quad z_1' = a_{11} z_1 - a_{21} \dfrac{y^2_1}{y^2_2} z_1 = \left(a_{11} - a_{21} \dfrac{y^2_1}{y^2_2}\right) z_1$

$\Longrightarrow \quad y(t) = w(t) \begin{pmatrix} y^2_1(t) \\ y^2_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung !!!

## <u>Reduktionsverfahren</u>

a) $\quad b_1 = a_{11} - a_{21} \dfrac{y^2_1}{y^2_2}$

b) $\quad$ Löse $z_1' = b_1 z_1 \qquad w(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{a_{21}(s)}{y^2_2(s)} z_1(s)\, ds$

$$z_2 \equiv 0$$

c) $\quad y(t) = w(t)\, y^2(t) + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ löst die DGL.

# Reduktionsverfahren für 2x2 Systeme

$y' = A(t)y \qquad y^{2\prime} = A(t)y^2 \qquad y_2^2 \neq 0$

bekannte Lösung

- $b_1 = a_{11} - a_{21}\dfrac{y_1^2}{y_2^2}$

- Löse $z_1' = b_1 z_1 \qquad w(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{a_{21}(s)}{y_2^2(s)} z_1(s)\, ds$

  $z_2 \equiv 0$

- $y(t) = w(t)\, y^2(t) + \begin{pmatrix} z_1(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ Lösung!

In unserem Fall

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \qquad y^2(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $b_1 = 0 - (-1)\dfrac{t}{1} = t$

- $z_1' = t z_1 \implies z_1(t) = e^{t^2/2}$

  $(z_1(0) = 1)$

  $$w(t) = \int_0^t \frac{(-1)}{1} e^{s^2/2}\, ds = -\int_0^t e^{s^2/2}\, ds$$

  $$y^1(t) = -\int_0^t e^{s^2/2}\, ds \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad !!!$$

**Beispiel**

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & -1 \\ 1/t^2 & 2/t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad t > 0.$$

Eine Lösung ist

$$y^2(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} \qquad v^2(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $$b_1 = a_{11} - a_{21}\frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\frac{t^2}{(-t)} = \frac{2}{t}$$

- $$z_1' = \frac{2}{t} z_1 \quad \Longrightarrow \quad z_1(t) = t^2$$

  (z.B. $z_1(1) = 1$)

$$w(t) = \int_1^t a_{21}(s)\frac{z_1(s)}{y_2^2(s)}\,ds = \int_1^t \frac{1}{s^2}\frac{s^2}{(-s)} = -\ln t$$

$$\Longrightarrow \quad y^1(t) = -\ln t \begin{pmatrix} t^2 \\ -t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v^1(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v^1$ und $v^2$ linear unabhängig!

Die inhomogene DGL:

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

gegeben sei ein Fundamentalsystem $Y(t)$!

Wie finde ich eine spezielle Lösung?

<u>Ansatz</u>: Variation der Konstanten

$$y_p(t) = Y(t)\,c(t)$$

Variation der Konstanten

$$y_p' = \underline{Y'(t)}\,c(t) + Y(t)\,c'(t) \overset{!}{=} (A\,\underline{Y(t)})\,c(t) + Y(t)\,c'(t)$$

$$= A\,\underline{y_p} + \underbrace{Y(t)\,c'(t)}_{h(t)}$$

Forderung

Forderung.

$$Y(t)\,c'(t) = h(t)$$

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,h(s)\,ds$$

$\Longrightarrow$

Allgemeine Lösung von $y' = A(t)\,y + h(t)$

$$\underline{y(t)} = \underbrace{Y(t)\,c_0}_{\text{Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung}} + \int_{t_0}^{t} \underbrace{Y(t)\,Y^{-1}(s)\,h(s)}_{\text{partikuläre Lösung!}}\,ds$$