Vorlesung DGL I 7.12.07

TAUBERT

Lineare DGL's höherer Ordnung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)\, y^{(1)}(t) + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$

Etwas Neues ?

Im Prinzip: NEIN !

- Aufgabe äquivalent zu System erster Ordnung

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{h}(t)$$

Vereinfachungen ?

JA

- Fundamentalsystem von einfacherer Gestalt
- Systemreduzierung + Variation der Konstanten einfacher
- Bei konstanten Koeffizienten $a_i(t) = a_i$
    - Eigenwerte ergeben sich als Nullstellen von

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

    - Ermittlung von Eigen-(Haupt-)Vektoren entfällt

Heute: 1½ Stunde über dieses Thema

Lineare DGL höherer Ordnung

$$\to \quad y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_k(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right. \quad \text{stetig}^{(*)}$$

homogen $(h(t) \equiv 0)$ inhomogen $(h(t) \not\equiv 0)$

Gesucht:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

y n-mal stetig differenzierbar mit

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = h(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Häufig Zuordnung

DGL $\longleftrightarrow$ linearer Differentialoperator n-ter Ordnung

$$L := \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}(\cdot)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0(\cdot)$$

$$L : C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$$

$$L[y](t) = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{n-1}(t) + \cdots + a_0(t)$$

Für $h(t)$ wird $y \in C^n(\mathbb{R})$ gesucht mit

$$\to \quad L[y](t) = h(t) \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

* Auch Teilintervalle $I \subset \mathbb{R}$ möglich!

Liegt eine neue Aufgabenstellung vor? Im Prinzip NEIN

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$

Für n-mal stetig differenzierbare Funktion $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ setze

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

DGL n-ter Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}' = A(t) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}'(t) = A(t)\, \vec{y}(t) + \vec{h}(t)$$

"System von n linearen DGL's erster Ordnung"

Ergebnis :

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{y}\,'(t) = A(t)\,\vec{y}(t) + \vec{h}(t)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$ "Begleitmatrix"

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \qquad \vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$ "Inhomogenität"

Falls	dann
$h(t) \equiv 0$	äquivalent zu homogenen System erster Ordnung
$a_i =$ konst	äquivalent zu System mit konstanter Matrix $A(t) = A$

Zweckmäßig: DGL n-ter Ordnung nicht in System 1-ter Ordnung umschreiben.

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)}(t) + \cdots\cdots + a_0(t)\, y(t) = h(t)$$

$$L[y](t) = h(t) \quad t \in \mathbb{R}$$

Allgemeine Lösung wieder

$$y = y_h + y_p$$

Wie finde ich die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung

$$L[y] \equiv 0 \; ?$$

$(y_1(t), \dots, y_n(t))$ heißt Fundamentalsystem zu $L[y] \equiv 0$ falls

a) $\quad L[y_k] \equiv 0 \qquad k = 1, 2, \dots, n$

b) $\quad W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

($W(t)$.= Wronski Determinante)

(Es genügt $W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in \mathbb{R}$)

Bemerkungen:

- Kennt man ein Fundamentalsystem (FS) dann ist die allgemeine Lösung von

$$L[y]=0$$

gegeben durch

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \,, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

- Wie finde ich ein Fundamentalsystem?

1. Im Prinzip sehr einfach: Löse die n AWAen

$$L[y_k]=0 \quad k=1,2,\dots,n$$

$$\begin{array}{llll}
1 & y_1(t_0)=1 & y_1'(t_0)=0 \;\cdots\cdots & y_1^{(n-1)}(t_0)=0 \\
2. & y_2(t_0)=0 & y_2'(t_0)=1 \;\cdots\cdots & y_2^{(n-1)}(t_0)=0 \\
\vdots & & & \\
n & y_n(t_0)=0 & y_n'(t_0)=0 \;\cdots\cdots & y_n^{(n-1)}(t_0)=1
\end{array}$$

dann $(y_1, \dots, y_n)$ Fundamentalsystem

$$W(t_0) = \det \begin{pmatrix} y_1(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

Wie finde ich ein Fundamentalsystem?

2. Kennt man <u>eine</u> Lösung $u(t) \not\equiv 0$ von $L[y]=0$, dann können weitere Lösungen durch Reduktion der Ordnung ermittelt werden!

Ansatz
$$y(t) = u(t)\,z(t)$$

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

$$L[y](t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(t) \binom{k}{0} u^{(k)}(t)\, z^{(0)}(t)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)} z^{(j)}$$

$$\overset{!}{=} \sum_{j=1}^{n} b_j(t)\, z^{(j)}(t) \overset{!}{=} 0 \quad \text{(Forderung)}$$

Setze $\quad w(t) = z^{(1)}(t)$

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1}(t)\, w^{(j)}(t) \overset{!}{=} 0$$

⇝ lineare homogene DGL der Ordnung $n-1$. Falls lösbar mit Fundamentalsystem $(w_1, \dots, w_{n-1})$

dann
$$(u, z_1 u, \dots, z_{n-1} u) \quad \text{FS zu } L[y]=0$$

$$z_i(t) = \int_{t_0}^{t} w_i(s)\,ds$$

Wie finde ich eine partikuläre Lösung y_p von $L[y] = h$?

Sei $(y_1, \dots, y_n)$ ein Fundamentalsystem von $L[y]=0$

Ansatz: Variation der Konstanten

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i(t)$$

Verlange:

$$c_1'(t) y_1(t) + \dots + c_n'(t) y_n(t) = 0$$

$$c_1'(t) y_1'(t) + \dots + c_n'(t) y_n'(t) = 0$$

(n-1 Gleichungen für $c_1', \dots, c_n'$)

$$\vdots$$

$$c_1'(t) y_1^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'(t) y_n^{(n-2)}(t) = 0$$

dann ist

$$y_p'(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i'(t)$$

$$\vdots$$

$$y_p^{(n-1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(n-1)}(t)$$

$$y_p^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t) y_i^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(t) y_i^{(n-1)}(t)$$

Ansatz $$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, y_i(t)$$

Forderungen

n-1 Gleichungen für $c_1', \dots, c_n'$

$$\begin{cases} c_1'(t)y_1(t) + \dots + c_n'(t)y_n(t) = 0 \\ c_1'(t)y_1'(t) + \dots + c_n'(t)y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= \sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_p^{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, y_i^{(k)}(t)} + a_n(t) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, y_i^{(n-1)}(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(t) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(t)\, y_i^{(k)}(t)}_{L[y_i]=0} + a_n(t) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} c_i'(t)\, y_i^{(n-1)}(t) \stackrel{!}{=} h(t)}_{n\text{-te Gleichung!}} \end{aligned}$$

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Lösen $\rightarrow$ c_i' Integrieren $\rightarrow$ $c_i(t)$

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, y_i(t)$$

Beispiel

$$y'' + y = 2$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

1. Finde FS (y_1, y_2) mit

$$L[y_i] = 0 \qquad i = 1,2$$

Löse die AWA'len

$$\begin{array}{l} L[y_1] = 0 \\ y_1(0) = 1 \quad y_1'(0) = 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad y_1(t) = \cos t$$

$$\begin{array}{l} L[y_2] = 0 \\ y_2(0) = 0 \quad y_2'(0) = 1 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad y_2(t) = \sin t$$

2. Finde partikuläre Lösung

Ansatz: $\quad y_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad c_1 = 2\cos t \qquad c_2 = 2\sin t$$

$$y_p = 2\cos t\cos t + 2\sin t\sin t \stackrel{!}{=} 2$$

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}$$
$$L[y] = 0$$

Gesucht: Fundamentalsystem (FS)

Ansatz
$$y(t) = e^{\lambda t}$$
$$L[y](t) = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \overset{!}{=} 0$$

mögliche λ ergeben sich als Nullstellen von
$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \quad \text{(Charakteristisches Polynom)}$$

<u>Satz</u>

a) λ_k sei r_k-fache reelle Nullstelle von $p(\lambda) = 0$

$$\left.\begin{aligned} y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\ y_{k2}(t) &= t e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ y_{k(r_k-1)}(t) &= t^{r_k-1} e^{\lambda_k t} \end{aligned}\right\} \quad \text{lösen } L[y] = 0$$

b) $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ sei r_k-fache komplexe Nullstelle
($\Rightarrow \bar{\lambda}_k$ ist auch r_k-fache Nullstelle)

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \qquad j = 1, 2, \dots, r_k$$
$$\bar{y}_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t) \qquad \text{lösen } L[y] = 0$$

c) Funktionen aus a und b bilden FS

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots\dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = h(t)$$

$$L[h](t) = h(t)$$

Gesucht: Partikuläre Lösung

Möglichkeiten:

- Variation der Konstanten
- Grundlösungsverfahren
- Spezielle Ansätze

Variation der Konstanten ✓

Grundlösungsverfahren

<u>Satz</u>

Sei $w(t)$ die Lösung der homogenen AWAbe

$$L[w] = 0$$

$$w(t_0) = 0,\ w'(t_0) = 0,\ \dots\dots,\ w^{(n-1)}(t_0) = 1$$

dann ist

$$\underline{y_p(t)} = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau) h(\tau)\, d\tau \quad \text{mit} \quad \underbrace{\underline{G(t,\tau)}}_{\text{Greensche}} = \underline{w(t-\tau+t_0)}$$

eine partikuläre Lösung

w Lösung von $L[w] \equiv 0$ mit

$$w(t_0) = 0, \; \dots\dots, \; w^{(n-1)}(t_0) = 1$$

$$\Longrightarrow \quad y_p(t) = \int_{t_0}^{t} w(t-\tau+t_0)\, h(\tau)\, d\tau \quad \text{partikuläre Lösung}$$

<u>Beispiel</u>

$$y'' + y = 2$$

Sol $\Longrightarrow$ Suche $w(t)$ mit $w''(t) + w(t) = 0$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1 \qquad \text{z.B. } t_0 = 0$$

$$w(t) = \sin t$$

$$y_p(t) = \int_0^t G(t,\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_0^t w(t-\tau)\cdot 2\, d\tau$$

$$= 2\int_0^t \sin(t-\tau)\, d\tau = 2\cos(t-\tau)\Big|_0^t = 2 - 2\cos t$$

Spezielle Ansätze für eine partikuläre Lösung von

$$L[y] = h$$

Annahme:

$h(\cdot)$ hat die spezielle Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j \quad \text{z.B.}$$

Polynome
Reine Exponentialfunktionen
cos, sin ?

<u>Ansatz</u>

a) $$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$ falls μ <u>nicht</u> Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = 0$$

b) $$y_p(t) = e^{\mu t} \underline{t^r} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$ falls μ r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = 0$$

Ansatz führt stets zum Ziel !!!

Beispiel

$$y'' - y = te^t$$

Es liegt die spezielle Form der rechten Seite vor!

<u>Allgemeine Lösung</u>:

Charakteristische Gleichung

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 1} \qquad \lambda_2 = -1$$

$$\Longrightarrow \qquad y_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

<u>Partikuläre Lösung</u>:

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t \underline{t} \, \underline{(\gamma_0 + \gamma_1 t)}$$

$$y_p''(t) - y_p(t) = e^t (2\gamma_1 + 2\gamma_0 + 4\gamma_1 t) \stackrel{!}{=} te^t$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_1 = \frac{1}{4} \qquad 2\gamma_1 + 2\gamma_0 = 0 \Longrightarrow \gamma_0 = -\frac{1}{4}$$

$$y_p = e^t t \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} t\right)$$

$$y = \underline{c_1 e^{+t} + c_2 e^{-t}} + e^t t \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} t\right)$$

Beispiel

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\cos t$$

gesucht partikuläre Lösung!

$h(t) = e^{-t}\cos t$ nicht von gewünschter Form

aber

$$e^{-t}\cos t = \operatorname{Re}(e^{-t}e^{it}) = \operatorname{Re} e^{(-1+i)t}$$

Behandle jetzt die Hilfsaufgabe

$$y'' + 2y' + 5y = e^{(-1+i)t}$$

Finde nun eine "Lösung" nach obigem Schema

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \implies \lambda_{1,2} = -1 \pm i2$$

Ansatz $\quad z_p(t) = e^{(-1+i)t} \cdot c \qquad -1+i \neq -1 \pm i2$

$$\begin{aligned} z_p'' + 2z_p' + 5z_p = {} & (-1+i)^2 e^{(-1+i)t} c \\ & + 2(-1+i)\, e^{(-1+i)t} c \\ & + 5 e^{(-1+i)t} c \overset{!}{=} e^{(-1+i)t} \end{aligned}$$

$$\implies (-1+i)^2 c + 2(-1+i)c + 5c = 1 \implies c = \frac{1}{3}$$

$$\underline{y_p(t)} = \operatorname{Re}\left(\tfrac{1}{3} e^{(-1+i)t}\right) = \tfrac{1}{3} e^{-t}\cos t$$

Hintergrund:

Gegeben sei

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = h$$

$$a_i \quad \text{reell}$$

$$h : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{C}}$$

z sei "Lösung" von

$$L[z](t) = h(t)$$

dann löst $\quad y_1 = \underline{\mathrm{Re}\, z}$

$$\underline{\underline{L[y_1](t) = \mathrm{Re}(h(t))}}$$

und $\quad y_2 = \underline{\mathrm{Im}\, z}$

$$\underline{\underline{L[y_2](t) = \mathrm{Im}(h(t))}}$$

$\Rightarrow$