Vorlesung DGL I 21.12.07

TAUBERT

Kurze Wiederholung

$y' = f(t,y)$, $t \in [0,\infty)$, $y^*(t)$ Lösung

y^* auf $[0,\infty)$ stabil, asymptotisch stabil, instabil?

Beschränkung auf $y^* = 0$

$$y' = A(t)\,y$$

$y^* \equiv 0$ stabil $\iff$ $\|Y(t)\| \le M$

$y^* \equiv 0$ asymp. stabil $\iff$ $\lim\limits_{t\to\infty} \|Y(t)\| = 0$

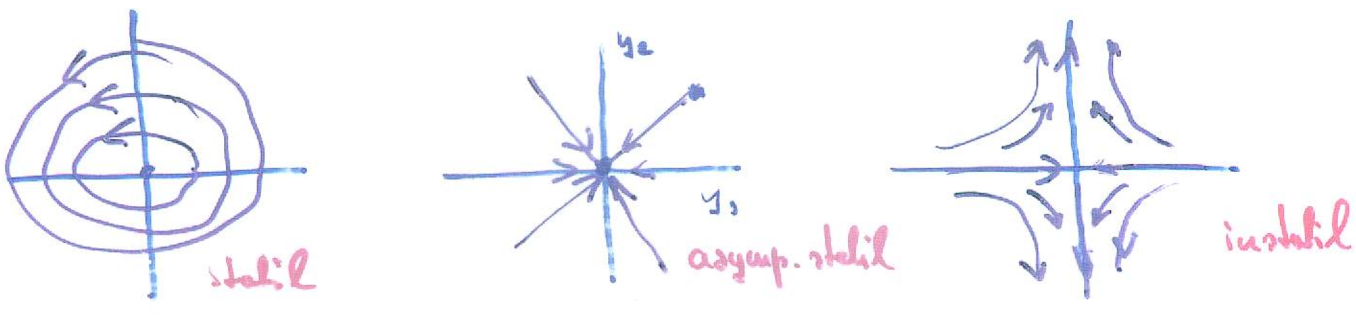
$$y' = Ay$$

λ_i Eigenwerte von A

$y^* \equiv 0$ stabil $\iff$ $\mathrm{Re}(\lambda_i) \le 0$
$\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0 \iff$ geom. Vielf. $=$ algebr. Vielf.

$y^* \equiv 0$ asymp. stabil $\iff$ $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$

$y' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y$ Trajektorien



Heute: Stabilität bei nichtlinearen autonomen DGL

$$y' = f(y)$$

Bemerkungen:

1. $y(t)$ Lösung $\Rightarrow$ $z(t) = y(t+c)$ $c \neq 0$ Lösung

$$z'(t) = y'(t+c) = f(y(t+c)) = f(z(t))$$

Bei nichtautonomen falsch. Beispiel

$y'(t) = t$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 + a$$

$$z(t) = y(t+c) = \frac{1}{2}(t+c)^2 + a$$

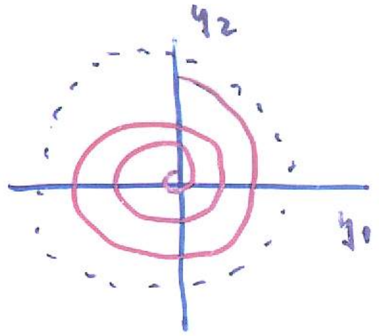
$$z'(t) = t + c \neq t \; !$$

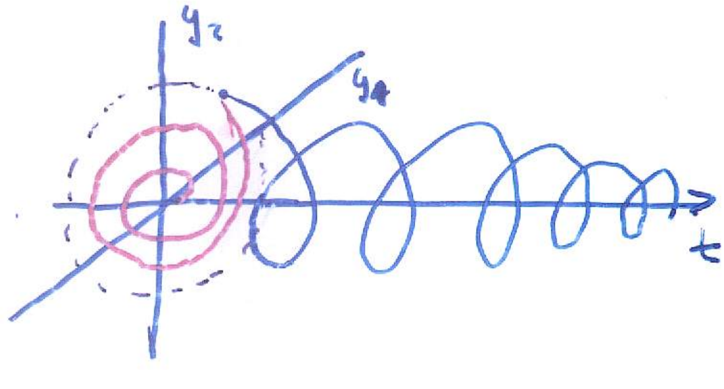
2. Autonomer 2x2 Fall

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} \quad f \text{ Lipschitz}$$

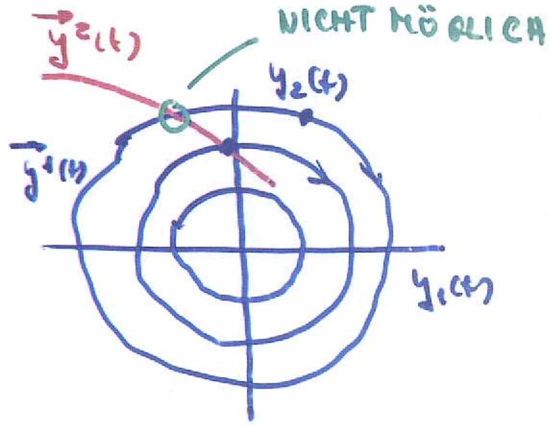
Trajektorien $\Longleftrightarrow$ Lösungskurven im Phasenraum

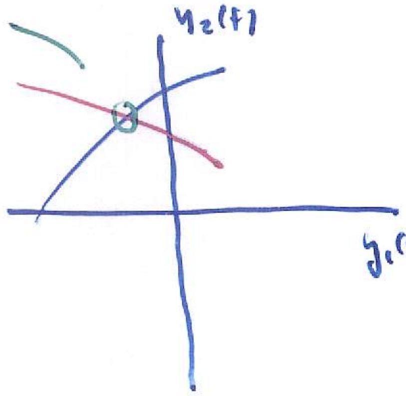
$$t \to \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$





3. Trajektorien können sich nicht schneiden



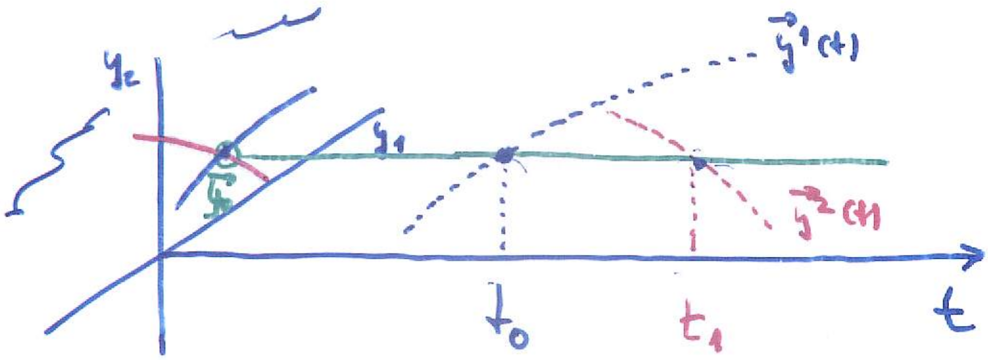


Gegeben seien zwei Lösungen $\vec{y}^1 = \begin{pmatrix} y_1^1(t) \\ y_2^1(t) \end{pmatrix}$ $\vec{y}^2 = \begin{pmatrix} y_1^2(t) \\ y_2^2(t) \end{pmatrix}$

$\vec{y}^1(t)$

$\vec{y}^2(t)$

$$y^1(t) \neq y^2(t+c)$$



Trajektorien schneiden sich, falls

$$\vec{y}^1(t_0) = \vec{y}^2(t_1) = \vec{y}_0$$

$\vec{z}(t) = \vec{y}^2(t-c)$ Lösung Wähle $c = t_0 - t_1$

$\vec{z}(t) = \vec{y}^2(t-t_0+t_1) \longrightarrow z(t_0) = \vec{y}^2(t_1)$

$$\Longrightarrow$$

$\vec{y}_0 = \vec{y}^1(t_0) = \vec{z}(t_0) \underset{\text{Eindeutigkeit aus Lip}}{\Longrightarrow} \vec{y}^1(t) = \vec{z}(t) = y^2(t-t_0+t_1)$

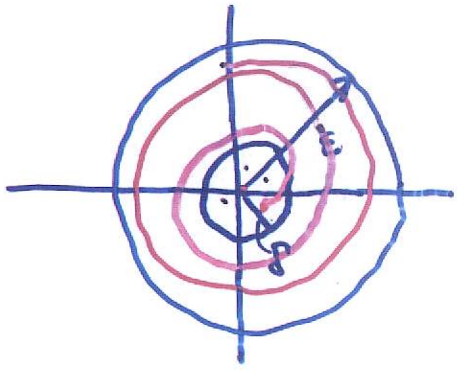
$\uparrow$

Widerspruch

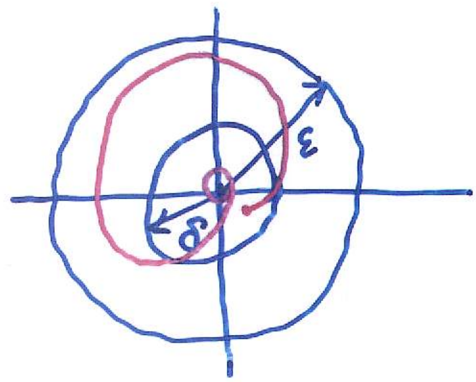
4. Graphische Interpretation der Stabilität bei autonomen 2x2 - Systemen.

$$I = [t_0, \infty) \qquad y^* \equiv 0 \text{ stabil}$$

$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0$ mit $\|y(t) - 0\| < \varepsilon^* \ \forall\ \|y(t_0) - 0\| < \delta^*$



stabil



asymptotisch stabil

5. Zwei Beispiele (ähnlich 14.12.07). Wird später gebraucht

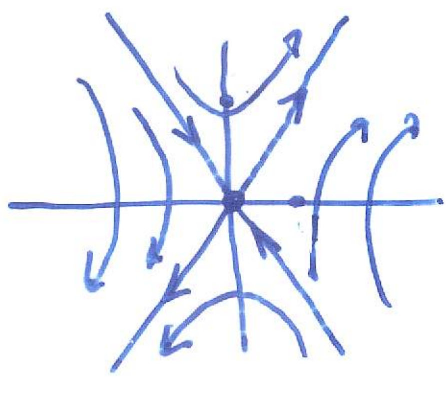
$$y' = Ay, \quad A\ 2\times2, \quad \omega > 0$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\omega \qquad FS = \left(e^{\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix}, e^{-\omega t}\begin{pmatrix} 1 \\ -\omega \end{pmatrix} \right)$$

Trajektorien $\quad t \to \begin{matrix} \alpha e^{\omega t} + \beta e^{-\omega t} \\ \alpha\omega e^{\omega t} - \beta\omega e^{-\omega t} \end{matrix}$

Sattelpunkt



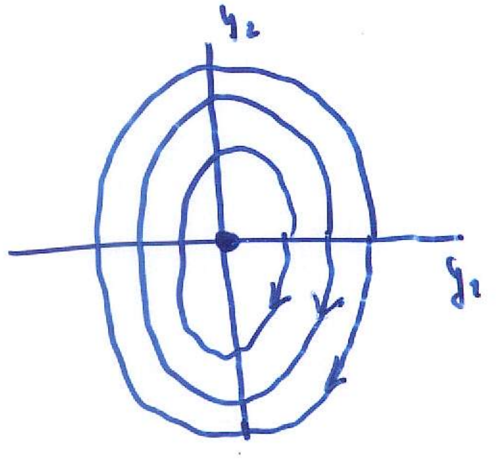
$$y'' + \omega^2 y = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \iff \lambda^2 + \omega^2 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \pm i\omega$$

$$FS \quad \begin{pmatrix} \sin\omega t & \cos\omega t \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{pmatrix}$$



<u>Zentrum</u>

Stabilitätsuntersuchungen bei nichtlinearen autonomen Systemen

→ Linearisierung

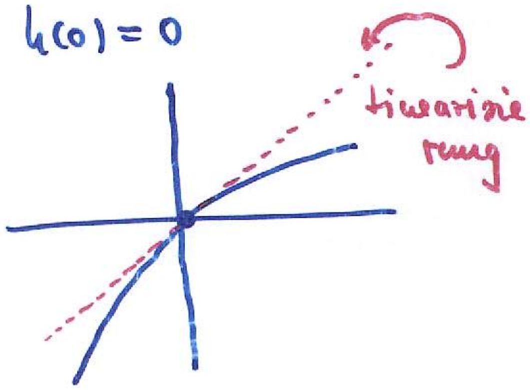
→ Ljapunov

$y' = f(y) \qquad f(y^*) = 0 \qquad$ OE $\quad y^* \equiv 0$

- Linearisierung

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(0) = 0$$

$$h(y) = \underbrace{\cancel{h(0)}}_{=0} + h'(0)y + \cancel{o(|y|)}$$



Allgemein:

$$f(y) = \cancel{f(0)} + (\underbrace{Df(0)}_{Jf(0)})y + o(\|y\|)$$

Anstatt	Jetzt
$y' = f(y)$	$y' = (Jf(0))y$

$y' = f(y)$, $f(0) = 0$, $y' = (Jf(0))y$

Frage:

Kann aus der Stabilität (insb. asymptotische bzw. Instabilität) von $y^* = 0$ des linearen Systems $y' = (Jf(0))y$ auf die Stabilität (......, ...) von $y^* = 0$ im nichtlinearen System $y' = f(y)$ geschlossen werden?

JA (mit Einschränkungen)

Satz

Ist $y^* = 0$ asymp. stabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = (Jf(0))y$ dann ist $y^* = 0$ asymp. stabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = f(y)$

Ist $y^* = 0$ instabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = (Jf(0))y$ dann ist $y^* = 0$ instabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = f(y)$.

Korollar

Sind λ_i die Eigenwerte von $\underline{A} = Jf(0)$

$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 \ \forall i \implies y^* = 0$ stabiler Gleichgewichtspunkt von $y' = f(y)$

Ein $\mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 \implies y^* = 0$ instabiler " " $y' = f(y)$

Bemerkung: Ein $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$ i.a. keine Aussage möglich

Beispiel (Mathematisches Pendel)

$$m l \ddot{\varphi} = -m g \sin\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi =: -\omega^2 \sin\varphi$$

System

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} = f(y)$$

Gleichgewichtspunkte

$$y_k = (y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0) \qquad k = \pm 0, 1, 2, \dots$$

Linearisierung von f in den Gleichgewichtspunkten

$$f(y) = f\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix} + \left(J f\begin{pmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + o(\|y\|)$$

Linearisiertes System

$$y' = (J f(y_k))(y - y_k)$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos(y_{1k}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix}$$

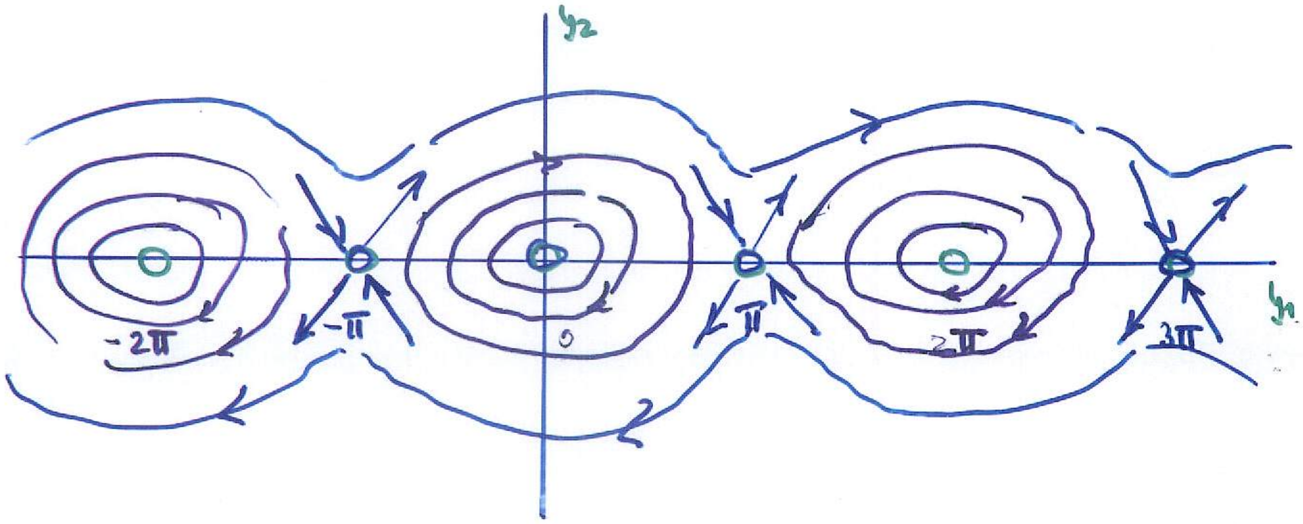
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & k \text{ gerade} \\ \pm \omega & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \cos y_1 \end{pmatrix} = f(y)$$

linearisiertes System
an den Gleichgewichtspunkten

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix} y$$

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & k \text{ gerade} \\ \pm \omega & k \text{ ungerade} \end{cases}$$



o Gleichgewichtspunkte $(k\pi, 0)$

Ungerade Vielfache von π (Instabil, Sattelpunkt)

Gerade Vielfache von π (stabil, beachte $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$)

$y' = y - y^2$

Stabilität bei nichtlinearen autonomen Systemen

- Ljapunov

Definition

Sei $V: D \to \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen) eine C^1-Funktion

V heißt Ljapunov-Funktion, falls

a) $V(0) = 0 \qquad V(y) > 0$ für $y \neq 0$

b) $(\nabla V(y), f(y)) \leq 0$ für alle y mit $0 < \|y\| \leq R$

gilt sogar

b') $(\nabla V(y), f(y)) < 0$ für alle y mit $0 < \|y\| \leq R$

dann V strenge Ljapunov-Funktion.

Satz

$$y' = f(y) \quad , \quad f(0) = 0$$

a) Ist $V(y)$ eine Ljapunov-Funktion, so ist $y^* = 0$ stabil

b) Ist $V(y)$ eine strenge Ljapunov-Funktion, so ist $y^* = 0$ asymptotisch stabil

c) Ist $(\nabla V(y), f(y)) > 0 \ \forall y$, dann ist $y^* = 0$ instabil

Beispiel

$$\dot{x} = -x^3 + y$$
$$\dot{y} = -x - y^5$$

$(0,0)$ stabil, asymptotisch stabil, instabil ?

$$V = ax^2 + by^2 \qquad a,b > 0$$

$$V(0,0) = 0 \,, \qquad V > 0 \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

$$(\nabla V(z), f(z)) = \left(\begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right)$$

$$= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6$$

setzt $a = b$

$$= -2ax^4 - 2by^6 < 0 \qquad x,y \neq 0$$

$\Longrightarrow$ $y^* = (0,0)$ asymptotisch stabil

$\longrightarrow$

$$\dot{y} = f(y)$$
$$(\dot{y}, \nabla V(y)) = (f(y), \nabla V(y)) \leq 0$$
$$\frac{d}{dt} V(y) \leq 0 \qquad V(y_0) = \alpha$$

Randwertaufgaben (RWAn)

Betrachte die lineare Differentialgleichung

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = r(t)$$

Bisher

$$y(t_0) = y_0 \qquad \text{AWAn}$$
$$y'(t_0) = y_0'$$

Jetzt andere Nebenbedingungen, z.B.

- $y(a) = d_1 \qquad y(b) = d_2$ Dirichlet $\quad d_i \in \mathbb{R}$
- $-y'(a) = d_1 \qquad y'(b) = d_2$ Neumann
- $-y'(a) + c\,y(a) = d_1 \qquad y'(b) + d\,y(b) = d_2$ Cauchy

oder allgemeiner

$$r(y(a), y'(a), y(b), y'(b)) = 0$$
$$r: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit
- Stetige Abhängigkeit von Daten

?

Im Gegensatz zu AWAn <u>nicht</u> immer gegeben

Beispiel

$$y'' + y = 0$$

Allgemeine Lösung $\qquad y = \alpha \cos t + \beta \sin t \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $y(0) = 0 \quad , \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$

$y(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

$y(\frac{\pi}{2}) = \beta \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = 1$

$\Rightarrow \quad y(t) = \sin t \qquad$ eindeutig lösbar

2. $y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 1$

$y(0) = \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

$y(\pi) = -\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -1$ $\Big\}$ Widerspruch!

keine Lösung

3. $y(0) = 0 \quad , \quad y(\pi) = 0$

$y(0) = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

$y(\pi) = -\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$

$\Rightarrow \quad y(t) = \beta \sin t \qquad$ unendlich viele Lösungen

Systeme von linearen inhomogenen RWAn

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

$$B_a y(a) + B_b y(b) = d \qquad (*)$$

$A(t)$, B_a, B_b $n \times n$ Matrizen

Satz

Gegeben sei die RWA $(*)$ mit stetigen Funktionen $h(t)$, $A(t)$.

$Y(t)$ sei FS zu $y' = A(t)y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

a) Die RWA ist für alle $h(t)$ eindeutig lösbar

b) Die vollhomogene Aufgabe

$$y' - A(t)y = 0 \qquad B_a y(a) + B_b y(b) = 0$$

hat nur die triviale Lösung

c) Die Matrix $B_a Y(a) + B_b Y(b)$ ist regulär

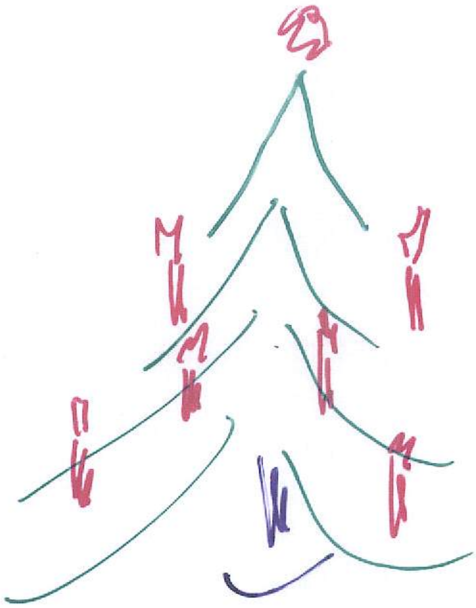
Beweis

Allgemeine Lösung $\quad y(t) = Y(t)c + y_p$

Betrachte $\quad B_a(Y(a)c + y_p(a)) + B_b(Y(b)c + y_p(b)) = d$

$$(B_a(Y(a)) + B_b(Y(b)))\,c = \underline{d - B_a y_p(a) - B_b y_p(b)}$$

fertig !!!



Wünsche Ihnen alles Gute zu

Weihnachten

und zu

Neuen Jahr

insbesondere

"Spaß am lernen" + "gut lernen"

insbesondere

DGL