Vorlesung DGL I 11.1.08

TAUBERT

Systeme von linearen inhomogenen RWAben

$$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$
$$B_a y(a) + B_b y(b) = d \qquad (*)$$

$A(t)$, B_a, B_b $n \times n$ Matrizen

Satz

Gegeben sei die RWAbe $(*)$ mit stetigen Funktionen $h(t)$, $A(t)$.
$Y(t)$ sei FS zu $y' = A(t)y$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Die RWA ist für alle $h(t)$ eindeutig lösbar

b) Die vollhomogene Aufgabe

$$y' - A(t)\,y = 0 \qquad B_a y(a) + B_b y(b) = 0$$

hat nur die triviale Lösung

c) Die Matrix $E = B_a Y(a) + B_b Y(b)$ ist regulär

$\rightarrow$ $Ax = b$ $\qquad Ax = 0$

$$y' = A(t)\,y + h(t)$$

$$B_a y(a) + B_b y(b) = d$$

eindeutig lösbar für <u>alle</u> h und d, wenn

$$E = B_a Y(a) + B_b Y(b) \text{ regulär}$$

<u>Beweis</u>

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$y(t) = y_p + Y(t)\,c \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

(gesucht ist c!)

Einsetzen in die Randbedingungen

$$B_a(y_p(a) + Y(a)c) + B_b(y_p(b) + Y(b)c) = d$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$[B_a Y(a) + B_b Y(b)]\,c = d - B_a y_p(a) - B_b y_p(b)$$

Eindeutig lösbar, falls

$$\det(E) = \det(B_a Y(a) + B_b Y(b)) \neq 0$$

oder E regulär

Übrigen Aussagen des Satzes ergeben sich sofort

$Ac = b$

Beispiel

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad y(b) = 1$$

Lösung $\quad y(t) = \alpha \cos t + \beta \sin t$

$$y(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \cancel{\alpha \cos t} + \beta \sin t$$

$b = \frac{\pi}{2} \quad : \quad y(\frac{\pi}{2}) = \beta \sin \frac{\pi}{2} = \beta = 1 \Longrightarrow$ eindeutig lösbar

$b = \pi \quad : \quad y(\pi) = 0 \neq 1 \Longrightarrow$ keine Lösung

Im Kontext mit Satz ?

Umschreiben in System $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \underline{\text{DGL}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Randbedingungen}}$$

$$\Updownarrow$$

$$z' = A z \qquad B_0 z(0) + B_b z(b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4)

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Komplexes FS

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad e^{-it}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Reelles FS

$$e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + i \sin t \\ i \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{Re}\left(e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right), \operatorname{Im}\left(e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\right) \right) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

$$E = B_a Y(0) + B_b Y(b) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix}$$

$b = \frac{\pi}{2}$: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ regulär $\Rightarrow$ eindeutig lösbar

$b = \pi$: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ singulär $\Rightarrow$ keine Aussage

Variationsrechnung

Aufgabenstellung (Variationsrechnung)

Gegeben sei

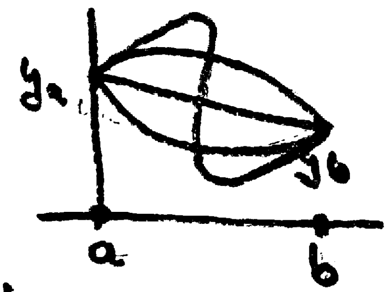
$$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gesucht ist eine (hinreichend) glatte Funktion

$$y : [a,b] \to \mathbb{R}$$

mit gewissen Randbedingungen, z.B.

$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$



welche das Funktional

$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

minimiert.

Satz

Jede Lösung der Variationsaufgabe erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \begin{array}{l} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{array}$$

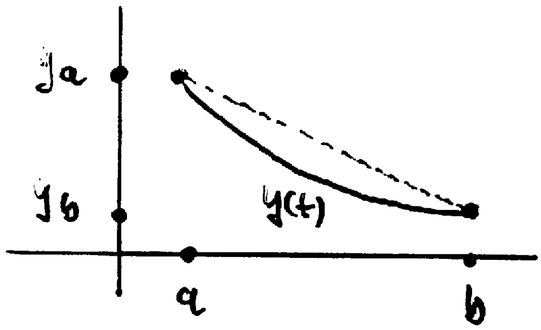
(Lagrange 1755)

$$y(a) = y_a$$
$$y(b) = y_b$$

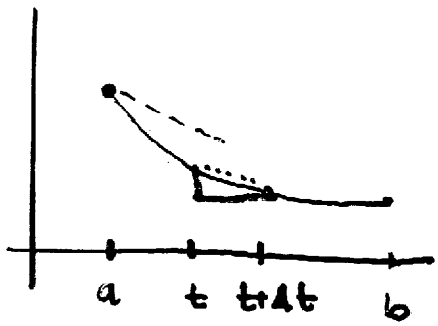
$$I[y] = \int_a^b f(t, y, y')\, dt = \min! \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

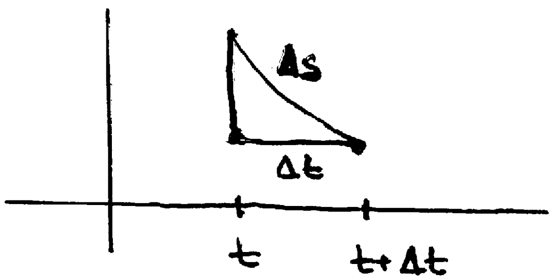
Beispiel

„Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten"



Länge $s(t)$ von $y(t)$ bestimmen





$$\Delta s^2 \cong \Delta t^2 + (y(t+\Delta t) - y(t))^2$$
$$\cong \Delta t^2 + (y'(t)\, \Delta t)^2$$

Summation und Grenzübergang $\Delta t \to 0$

$$I[y] = \int_{s(a)}^{s(b)} ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

$$f(t, y, y') = \sqrt{1 + y'^2(t)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y'} = c \iff \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = c$$

$$y'^2 = \frac{c^2}{(1-c^2)} \Rightarrow y' = k \Rightarrow y \text{ ist Gerade}$$

Es sei y_0 das Minimum von $I[y]$, d.h.

$$I[y_0] \leq I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\,dt$$

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

Satz besagt

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}(t, y_0(t), y_0'(t)) - \frac{\partial f}{\partial y}(t, y_0(t), y_0'(t)) = 0$$

Wie kommt man zu diesem Resultat?

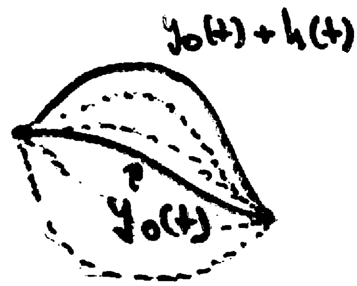
Es sei $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = h(b) = 0$

Betrachte die Menge der Funktionen

$$y_0(t) + \varepsilon h(t) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

Dann gilt

$$y_0(a) + \varepsilon h(a) = y_a$$
$$y_0(b) + \varepsilon h(b) = y_b$$



Es sei jetzt

$$J(\varepsilon) = I[y_0 + \varepsilon h]$$

Dann hat

$$J(\varepsilon) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

(als Funktion von ε) ein Minimum für $\varepsilon = 0$. D.h.

$$\delta I := \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y_0+\varepsilon h] = \frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b f(t, y_0(t)+\varepsilon h(t), y_0'(t)+\varepsilon h'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} f(t, y_0(t)+\varepsilon h(t), y_0'(t)+\varepsilon h'(t))\,dt =$$

$$= \int_a^b f_y(t, y_0(t)+\varepsilon h(t), y_0'(t)+\varepsilon h'(t))\,h(t) + f_{y'}(t, y_0(t)+\varepsilon h(t), y_0'(t)+\varepsilon h'(t))\,h'(t)\ldots$$

$$\varepsilon = 0 \;!$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} I[y_0+\varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b f_y(t, y_0, y_0')\,h(t) + f_{y'}(t, y_0, y_0')\,h'(t)\,dt = 0$$

Partielle Integration: (Beachte $\frac{d}{dt}(f_{y'}h) = (\frac{d}{dt}f_{y'})h + f_{y'}h'$)

$$\int_a^b f_{y'}(t, y_0, y_0')\,h'(t)\,dt = -\int_a^b \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0')\,h(t)\,dt + \underbrace{\cancel{f_{y'}(t, y_0, y_0')\,h(t)}\Big|_a^b}_{=0}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0')\right) h(t)\,dt \overset{!}{=} 0$$

$$\underset{\text{(für alle } h)}{\Longrightarrow} \qquad f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \overset{!}{=} 0$$

$$\int_a^b f(t, y(t), y'(t))\,dt \; + \; \text{Randbedingungen} = \text{Min}!$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} \overset{!}{=} 0$$

<u>Spezialfälle</u>

a) $f = f(t, y')$

$$f_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0(t)) = 0$$

$$\Rightarrow \quad f_{y'}(t, y_0(t)) = \text{konst}!$$

b) $f = f(y, y')$

Dann gibt es eine Erhaltungsgröße

Betrachte
$$H = f - f_{y'} y'$$

$$\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt}(f - f_{y'} y') = f_y y' + f_{y'} y'' - \frac{d}{dt} f_{y'}\, y' - f_{y'} y''$$

$$= \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' \equiv 0$$

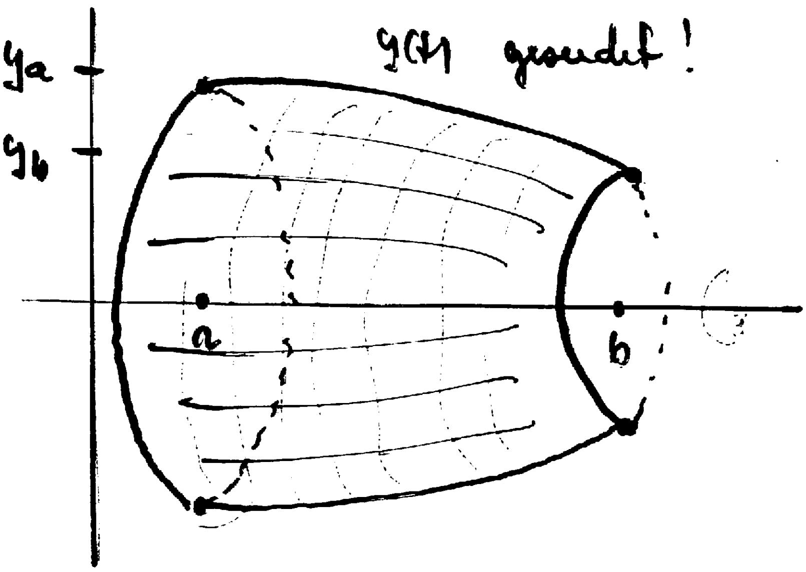
$$\Rightarrow \quad H = \text{const}!$$

Beispiel a: Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten

$$f(t, y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

Beispiel für b : Rotationssymmetrische Minimalfläche

Gesucht ist eine die beiden Punkte (a, y_a), (b, y_b) verbindende Kurve* $y(t)$, so daß der durch Rotation entstehende Rotationskörper eine minimale Mantelfläche besitzt.



Aufgaben

1. Mantelfläche eines Rotationskörpers bestimmen
2. Kurve die zu minimaler Mantelfläche führt bestimmen

Ergebnis

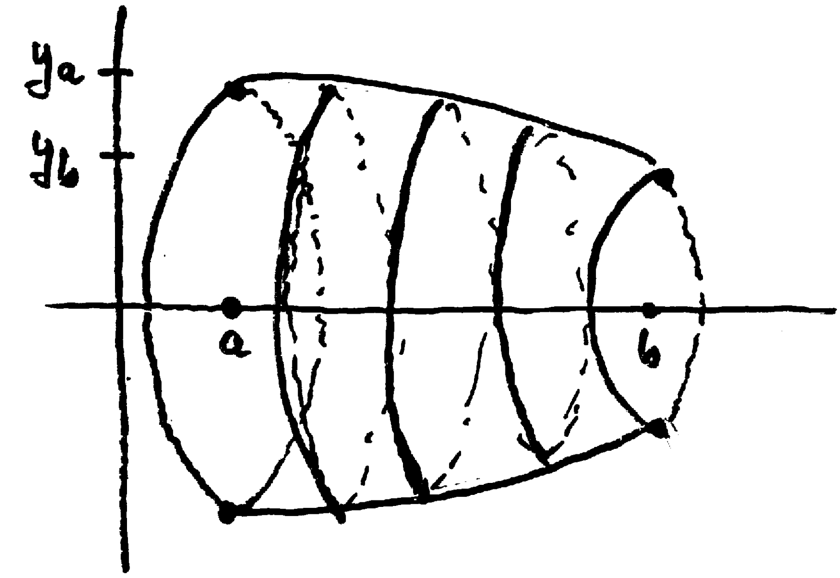
1. $\rightarrow$ $$I[y] = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{1+y'^2(t)}\,dt$$

2. $\rightarrow$ $$y(t) = C_1 \cosh\left(\frac{t}{C_1} + C_2\right)$$

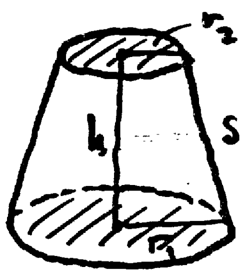
C_1, C_2 so daß $y(a) = y_a$ $y(b) = y_b$

* y mindestens einmal stetig differenzierbar

1. Mantelfläche eines Rotationskörpers bestimmen



Wir denken uns den Rotationskörper zusammengesetzt aus Kegelstümpfen



Mantelfläche (Schule)

$$MF = \pi\left(s(r_1+r_2)\right)$$

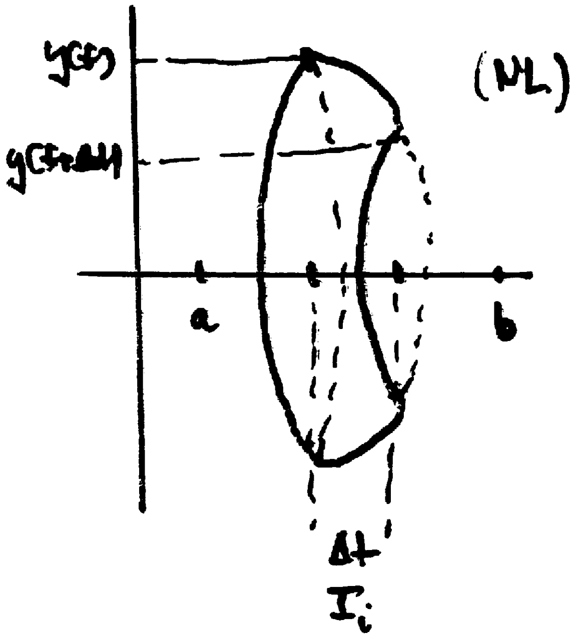
oder

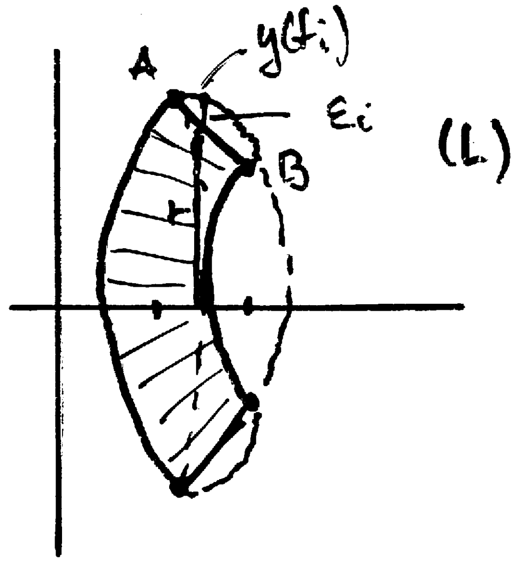
$$MF = 2\pi s\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)$$

1. Schritt

Unterteilung des Grundintervalls $[a,b]$ in n Teilintervalle der Länge Δt

Betrachte den Teil (NL) des Mantels der zu einem Teilintervall I_i (mit Länge Δt) gehört und den zugehörigen Kegelstumpf (L)



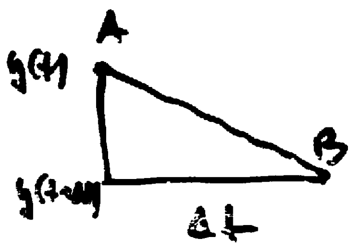


Die Fläche des Kegelstumpfes (L) ist gegeben durch

$$2\pi\,\overline{AB}\,r = 2\pi\,\overline{AB}\,(y(t_i)-\varepsilon_i)$$

Die Länge $\overline{AB}$ ergibt sich aus

$$(\overline{AB})^2 = (y(t+\Delta t)-y(t))^2+(\Delta t)^2$$
$$\underset{\text{Mittelwertsatz}}{=} (y'(t_i^*)\,\Delta t)^2+(\Delta t)^2$$



Die Fläche des Mantels (L) des Kegelstumpfes ist

$$F_i = 2\pi \sqrt{(1+y'^2(t_i^*))}\,\Delta t\,(y(t_i)-\varepsilon_i)$$

Addition aller Mantelflächen F_i liefert

$$2\pi\,(y(t_1)-\varepsilon_1)\,(1+y'^2(t_1^*))^{1/2}\,\Delta t \;+$$
$$2\pi\,(y(t_2)-\varepsilon_2)\,(1+y'^2(t_2^*))^{1/2}\,\Delta t \;+$$
$$\vdots$$
$$2\pi\,(y(t_n)-\varepsilon_n)\,(1+y'^2(t_n^*))^{1/2}\,\Delta t$$

oder

$$F \equiv 2\pi \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\,(1+y'^2(t_i^*))^{1/2}\,\Delta t + 2\pi \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\,(1+y'^2(t_i^*))^{1/2}\,\Delta t$$

Nun $\Delta t \to 0$

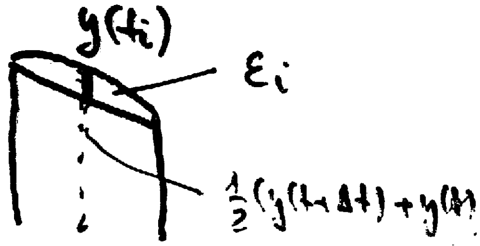
Die erste Summe strebt gegen (R-Integral)

$$2\pi \int_a^b y(t)\,(1+y'^2(t))^{1/2}\,dt$$

Die zweite Summe strebt gegen 0 !. Also

$$F = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{1+y'^2(t)}\,dt$$

Warum strebt die zweite Summe gegen Null?



$$\varepsilon = \max_i |\varepsilon_i| .$$

$$|\varepsilon_i| = \left| y(t_i) - \tfrac{1}{2}(y(t+\Delta t) + y(t))\right| = \left|\tfrac{1}{2}y(t_i) - \tfrac{1}{2}y(t+\Delta t) + \tfrac{1}{2}y(t_i) - \tfrac{1}{2}y(t)\right|$$

$$\leq \tfrac{1}{2}\Delta t \cdot 2 \max_{t \leq \xi_i \leq t+\Delta t} |y'(\xi_i)| \leq \Delta t \max_{a \leq t \leq b} |y'(t)| = \Delta t M$$

$$\Rightarrow \left| 2\pi \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (1+y'^2(t_i^*))^{1/2} \Delta t \right| \leq 2\pi \Delta t M \sum_{i=1}^{n} (1+y'^2(t_i^*))^{1/2} \Delta t$$

$$\to 0 \quad n \to \infty$$

Mit

$$I[y] = \int_a^b y(t)\sqrt{1+y'^2(t)}\, dt$$

liegt Fall b vor $f(t,y,y') = f(y,y')$.

$$\Rightarrow \quad f - f_{y'} y' = c$$

$$y\sqrt{1+y'^2} - y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y}{1+y'^2} \overset{!}{=} c$$

$$y'^2 = \frac{y^2}{c^2} - 1$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 \cosh\left(\frac{t}{c_1} + c_2\right)$$