1.2.2008

VORLESUNG DGL I

TAUBERT

Numerische Verfahren für Randwertaufgaben

- Differenzenverfahren
- Finite Elemente
- Schießverfahren (einfach + Mehrziel)
-

⋮

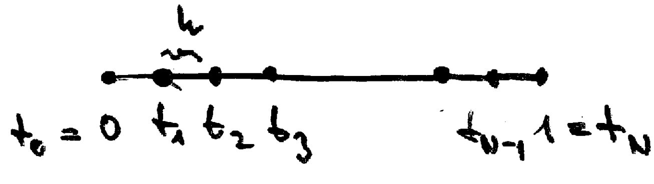
Beispiel (Differenzenverfahren)

$$-y'' + y = f \qquad t \in (0,1)$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

$y(\cdot)$ Lösung

$$-\cancel{\lim_{h \to 0}} \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2} + y(t) \cong f(t)$$

Unterteilung von $[0,1]$
N gleiche Teile



Betrachte für $t = t_1, t_2, \dots, t_{N-1}$ die Relationen

$$-\frac{y(t_2) - 2y(t_1) + 0}{h^2} + y(t_1) \cong f(t_1)$$

$$\vdots$$

$$-\frac{y(t_{i+1}) - 2y(t_i) + y(t_{i-1})}{h^2} + y(t_i) \cong f(t_i) \qquad i = 2, \dots, N-2$$

$$\vdots$$

$$-\frac{0 - 2y(t_{N-1}) + y(t_{N-2})}{h^2} + y(t_{N-1}) \cong f(t_{N-1})$$

Mit $y(t_i) \approx y_i$ ergibt sich ein Gleichungssystem

$$\underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{(N-1)\times(N-1) \\ A}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix}}_{\bar{y}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{(N-1)\times(N-1) \\ E}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{pmatrix}}_{\bar{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f(t_1) \\ f(t_2) \\ \vdots \\ f(t_{N-1}) \end{pmatrix}}_{\bar{f}}$$

$$\left(\frac{1}{h^2}\underline{A} + \underline{E}\right)(\bar{y}) = \underline{\bar{f}} \iff (A + h^2 E)\,\bar{y} = h^2 \bar{f}$$

Es gilt übrigens

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ nh \to t}} y_n = y(t)$$

<u>Beispiel</u> (Finite Elemente)

$$-y'' = f$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

Überführen in Variationsaufgabe:

$$\int_0^1 \frac{1}{2}y'^2 - fy \, dt = \int_0^1 F(t, y, y')\,dt = \min!$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

$-y'' = f$ $\qquad$ $\int_0^1 \frac{1}{2}y'^2 - fy\,dt = \min$ $\qquad$ Euler-Lagrange

$y(0) = y(1) = 0$ $\qquad$ $y(0) = y(1) = 0$ $\qquad$ $-y'' - f = 0$

$y(0) = y(1) = 0$

Also: Gesucht ist eine Funktion aus $C^1[0,1]$ mit

$$y(0) = y(1) = 0$$

so daß

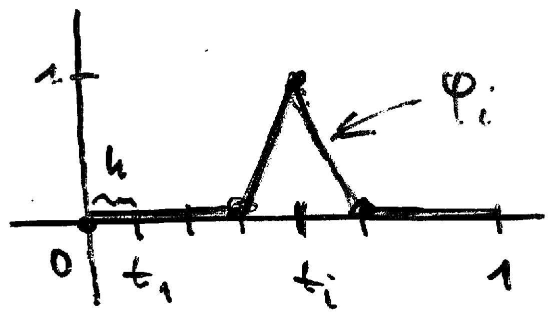
$$I(y) = \int_0^1 \frac{1}{2}y'^2 - fy\,dt = \int_0^1 F(t,y,y')\,dt \doteq \text{Min!!!}$$

Idee: Suche das Minimum nicht in $C^1[0,1]$ sondern in

$$V = \left\{ \varphi \,/\, \varphi = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i \quad a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

φ_i

Hütchen-Funktionen



Betrachte $\qquad I_h : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$

$$I_h(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}) = \int_0^1 F\Big(t, \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i(t), \sum_{i=1}^{N-1} a_i \varphi_i'(t)\Big)\,dt = \text{Min!}$$

Notwendig für Minimum (Analysis)

$$\frac{\partial I_h}{\partial a_i} = 0 \qquad i = 1, \dots, N-1$$

Es entsteht ein Gleichungssystem

$$A\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h\int_0^1 f\varphi_1\,dt \\ \vdots \\ h\int_0^1 f\varphi_{n-1}\,dt \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Übrigens:

mit $h \to 0$ $\quad \varphi_h(\cdot) \longrightarrow y(\cdot)$

- <u>(Einfaches) Schießverfahren</u>

Betrachte RWAe zweiter Ordnung

$$\boxed{\begin{aligned} y'' &= f(t,y,y') \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{aligned}} \qquad \text{RWAe}$$

Löse Alternativ mit $y'(a) = z$

$$\boxed{\begin{aligned} y'' &= f(t,y,y') \\ y(a) &= y_a \\ y'(a) &= z \end{aligned}} \qquad \text{AWAe}$$

Hoffnung: Lösung der AWAe liefert Lösung der RWAe

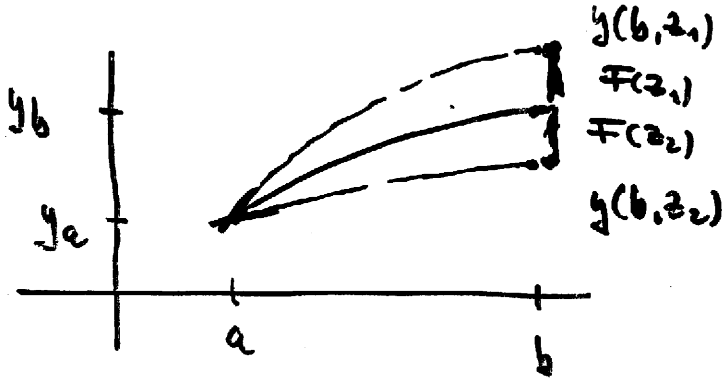
$$\begin{aligned} y'' &= f(t,y,y') \\ y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} y'' &= f(t,y,y') \\ y(a) &= y_a \\ y'(a) &= z \end{aligned}$$

Lösung der AWA sei

$$y = y(t,z)$$

Behandle

$$F(z) = y(b,z) - y_b \qquad \left(\text{Wunsch } z \text{ so } F(z)=0 \right)$$



$y'(a) = z_1$

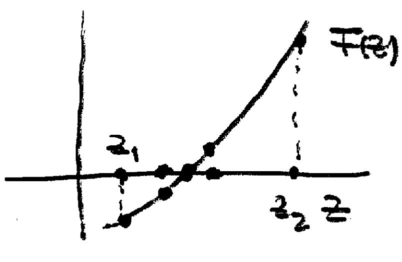
$y'(a) = z_2$

Gesucht ist Nullstelle von $F(z)$

- <u>Bisektion</u>

$F(z)=0$ ✓

$F(z_1)F(z_2) < 0 \qquad z_1 < z_2$



$z_3 = z_1 + \frac{1}{2}(z_2 - z_1)$

$F(z_1)F(z_3) < 0 \qquad z_2 = z_3$

sonst $\qquad z_1 = z_3$

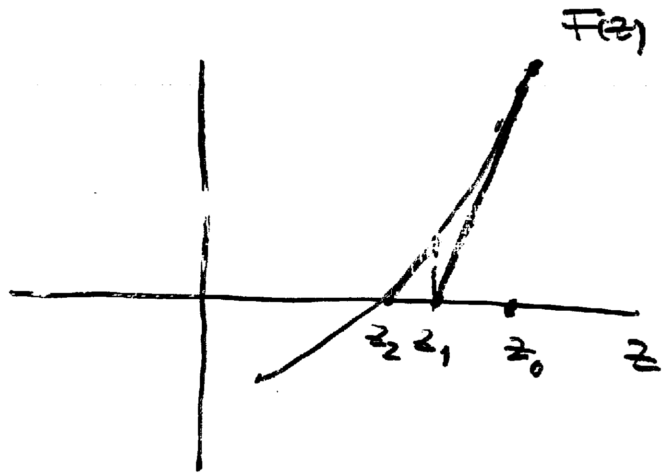
usw.

- Newton-Verfahren

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$F(z) = y(b, z) - y_b$$

Wie findet man eine Nullstelle mit dem Newton Verfahren?



$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)}$$

Bestimmung von $F'(z_n)$?

- Differenzenquotient

$$F'(z) \approx \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z}$$

Δz so daß $\frac{|z|}{\Delta z} \leq \mathrm{eps}$

- Lösung der Variationsgleichung

- Bestimmung von $F'(z)$ über eine Variationsgleichung

$$F'(z) = \frac{\partial}{\partial z}\big(y(b,z) - y_b\big) = \frac{\partial}{\partial z} y(b,z)$$

Betrachte

$$\underbrace{w(t)} := \frac{\partial}{\partial z} y(t,z)$$

und

$$y''(t,z) = f\big(t, y(t,z), y'(t,z)\big)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} y''(t,z) = f_y(t, y(t,z), y'(t,z)) \frac{\partial}{\partial z} y(t,z) + \\ + f_{y'}(t, y(t,z), y'(t,z)) \frac{\partial}{\partial z} y'(t,z)$$

$$y \in C^2$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} y(t,z)} = f_y(t, y(t,z), y'(t,z)) \frac{\partial}{\partial z} y(t,z) + \\ + f_{y'}(t, y(t,z), y'(t,z)) \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z} y(t,z)$$

$$w''(t) = f_y(t, y(t,z), y'(t,z))\, w(t) + f_{y'}(t, y(t,z), y'(t,z))\, w'(t)$$

$$w(a) = 0$$
$$w'(a) = 1$$

Insgesamt

$$y'' = f(t,y,y') \qquad\qquad w'' = f_y(t,y,y')\,w + f_{y'}(t,y,y')\,w'$$
$$y(a) = y_a \qquad\qquad w(a) = 0$$
$$y'(a) = z \qquad\qquad w'(a) = 1$$

Weiteres: Aussage - Obile

Die Laplace-Transformation

Laplace-Transformation $\longleftrightarrow$ Integraltransformation *

$$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt \qquad s \in \mathbb{C}$$

- Praxis (meistens) einfach
- Anwendungen
  - Differentialgleichungen
  - Regelungstechnik
  - Elektrotechnik
- Theorie (etwas) anspruchsvoller

$$\int_0^\infty f(t) e^{-st} \, dt =. \lim_{a \to \infty} \int_0^a f(t) e^{-st} \, dt$$

Zulässige Funktionen f ?

- f lokal Riemann-Integrierbar (hier)
- f lokal (Lebesgue) Integrierbar (hier nicht)

* Ansorge, Oberle S. 419-29

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt \qquad s \in \mathbb{C}$$

Beispiel (Heaviside-Funktion)

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

$$\int_0^a H(t) e^{-st} dt = \int_0^a e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^a = -\frac{1}{s} e^{-sa} + \frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{s}(1 - e^{-sa})$$

$\lim_{a \to \infty}$? $\exists$ nur wenn $\operatorname{Re} s > 0$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} \qquad \operatorname{Re} s > 0$$

Beispiel (Exponentialfunktion)

$$u(t) = e^{-\beta t}, \qquad \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^a e^{-\beta t} e^{-st} dt = \int_0^a e^{-(\beta+s)t} dt = -\frac{1}{\beta+s} e^{-(\beta+s)t} \Big|_0^a$$

$$= \frac{1}{\beta+s}\left(1 - e^{-(\beta+s)a}\right)$$

$\lim_{a \to \infty}$? $\exists$ nur wenn $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} \beta = -\beta$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(e^{-\beta t}) = \frac{1}{\beta+s} \qquad \operatorname{Re} s > -\beta$$

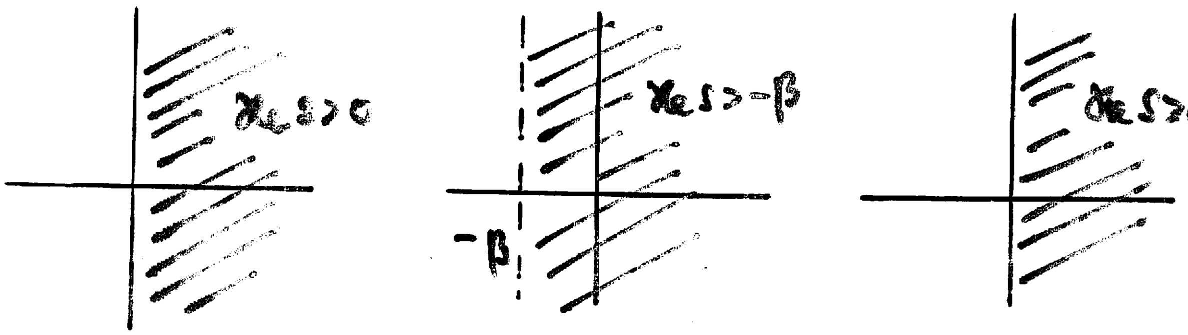
<u>Beispiel</u> (Eine trigonometrische Funktion)

$$u(t) = \cos kt \qquad k \neq 0$$

Trick : $\cos kt = \frac{1}{2}\left(e^{ikt} - e^{-ikt}\right)$

$$\mathcal{L}(\cos kt)(s) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s-ik} + \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{s}{s^2+k^2} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Beachte: In jedem Beispiel existiert die L-Transformation für alle s mit $\operatorname{Re} s > \gamma$ (γ geeignet)



Heaviside $\qquad e^{-\beta t} \qquad \cos kt$

<u>Satz</u>

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar

$$|f(t)| \leq M e^{\gamma t} \quad \forall\, t \geq 0$$

für Konstanten M und γ.

Dann existiert die Laplace-Transformation von f für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > \gamma$.

<u>Definition</u> (Konvergenzabszisse)

Die kleinste Zahl γ mit $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ existiert für alle s mit $\operatorname{Re} s > \gamma$ heißt Konvergenzabszisse von f.

Existiert die Laplace-Transformation zu f, dann liefert die Laplace-Transformation eine Funktion F auf einer Halbebene in $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{L}(\underline{f}) = F$$

z.B.

$$\mathcal{L}(H)(s) = \frac{1}{s} \qquad F(s) = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}(e^{\beta t})(s) = \frac{1}{\beta + s} \qquad F(s) = \frac{1}{\beta+s} \quad \operatorname{Re} s > -\beta$$

$$\mathcal{L}(\cos kt)(s) = \frac{s}{s^2+k^2} \qquad F(s) = \frac{s}{s^2+k^2} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

$$\mathcal{L}(\sin kt)(s) = \frac{k}{s^2+k^2} \qquad F(s) = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \operatorname{Re} s > 0$$

F heißt Laplace-Transformierte von f

(Bild-Funktion) (Originalfunktion)

Definition: Eine lokal integrierbare Funktion $u:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ heißt Nullfunktion, wenn $\int_0^t u(\tau)\,d\tau = 0$ für alle $t \geq 0$.

Satz

Sind zwei Bildfunktionen gleich, dann unterscheiden sich die Originalfunktionen höchstens um eine Nullfunktion.

Laplace-Transformation

$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$	$f(t)=\mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s)=\mathcal{L}(f(t))$
$\delta(t)$	1	$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$1/s$	t	$1/s^2$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}\ (n\in\mathbb{N})$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{1}{s^a}\ (a>0)$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n}\ (n\in\mathbb{N})$
$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b}\left(a e^{-at}-b e^{-bt}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a}\sin at$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{a}\sinh at$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1-\cos at}{a^2}$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{at-\sin at}{a^3}$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$\frac{\sin at-at\cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{\sin at+at\cos at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2}\left(2\cos at-at\sin at\right)$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{b\sin at-a\sin bt}{ab(b^2-a^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\cos at-\cos bt}{(b^2-a^2)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\frac{\sinh at-\sin at}{2a^3}$	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan\frac{a}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\lvert\sin at\rvert$	$\frac{a\coth(\pi s/2a)}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{2}\left(\sin t+\lvert\sin t\rvert\right)$	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$
$H(t)-H(t-a)$	$\frac{1-e^{-as}}{s}$	$\frac{(t-a)^{b-1}}{\Gamma(b)}H(t-a)$	$\frac{1}{s^b}e^{-as}\ (b>0)$
$f(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s)$	$f(t)$ $\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s)$

Eigenschaften der Laplace-Transformation · Rechenregeln

- $\mathcal{L}$ ist eine lineare Transformation

$$\mathcal{L}(af_1 + bf_2) = a\mathcal{L}(f_1) + b\mathcal{L}(f_2)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

- Differentiationssatz $\left(\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0) \right)$

$y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und stetig differenzierbar $|y(t)| \le Me^{\beta t}$, $\beta > 0$. Existiert $\mathcal{L}(y')$ für $\operatorname{Re} s > \beta > 0$, dann gilt

$$\mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}(y) - y(0)$$

Beweis:

$$\int_0^\infty e^{-st} y'(s)\,ds = \left[e^{-st} y(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st} y(t)\,dt$$

$$\mathcal{L}(y') \quad = \quad -y(0) \quad + \quad s\mathcal{L}(y)$$

$$\operatorname{Re} s > \beta > 0$$

- Allgemeiner Differentiationssatz

$$\mathcal{L}(y^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(y) - s^{n-1} y(0) - s^{n-2} y'(0) - \cdots - s y^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

- Integrationssatz $\quad \mathcal{L}\left(\int_0^t y(\tau)\,d\tau\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(y)$

Es sei $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ lokal integrierbar
$|y(t)| \le M e^{\beta t}$, $\beta > 0$ und $\mathcal{L}(y)$ $\operatorname{Re} s > \beta > 0$
Sei
$$\varphi(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$
Dann existiert $\mathcal{L}(\varphi)$ für $\operatorname{Re} s > \beta > 0$ und
$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(y)$$

- Faltung $\quad \mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\cdot\mathcal{L}(f_2) \quad \leftarrow$

Es seien $y_1, y_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zwei lokal integrierbare Funktionen und
$$\psi(t) = \int_0^t y_1(t-\tau)\,y_2(\tau)\,d\tau \quad *$$
(ψ heißt Faltung von y_1 mit y_2, häufig $y_1 * y_2$)
Dann gilt (mit vernünftigen Voraussetzungen)
$$\mathcal{L}(y_1)\,\mathcal{L}(y_2) = \mathcal{L}(y_1 * y_2) = \mathcal{L}(\psi)$$

* Beachte: Grundlösungsverfahren ($y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y^{(0)} = h$)
führte zu
$$y_p(t) = \int_0^t \omega(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

Elementare Beispiele

- Sprungantwort eines TP1-Gliedes

$$T\dot{x} + x = kH(t) \qquad k, T > 0, \quad t \geq 0$$
$$x(0) = 0$$

Formale Anwendung der Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}(T\dot{x} + x) = \mathcal{L}(kH)$$

$$T\mathcal{L}(\dot{x}) + \mathcal{L}(x) = k\mathcal{L}(H) \qquad \text{Linearität}$$

$$Ts\mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(x) = k\mathcal{L}(H) \qquad \text{Differentiationsregel}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{k}{1+Ts}\mathcal{L}(H)$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{k}{1+Ts}\frac{1}{s} \qquad \text{Heaviside-Funktion}$$

$$= \frac{T}{\frac{1}{T}+s}\frac{k}{s}$$

$$= \mathcal{L}(Te^{-\frac{t}{T}})\mathcal{L}(kH)$$

$$= \mathcal{L}(Te^{-\frac{t}{T}} * kH) \qquad \text{Faltung}$$

$$x(t) = \int_0^t Te^{-\frac{(t-\tau)}{T}} kH(\tau)\,d\tau \qquad \text{Originalfunktion}$$

Beispiel (DGL ohne Anfangbedingungen)

$$\ddot{x} + 4x = \sin \omega t$$

Ohne Anfangbedingungen ? Setze

$$x(0) = C_0$$
$$\dot{x}(0) = C_1$$

Anwendung der Laplace-Transformation

$$s^2 \mathcal{L}(x) - sC_0 - C_1 + 4\mathcal{L}(x) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$(s^2+2^2)\mathcal{L}(x) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + sC_0 + C_1$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+2^2)} + C_0 \frac{s}{s^2+2^2} + \frac{C_1}{2}\frac{2}{s^2+2^2}$$

$$x(t) = C_0 \cos 2t + \frac{C_1}{2}\sin 2t + \begin{cases} \frac{1}{2(\omega^2-4)}(\omega \sin 2t - 2\sin \omega t) & \omega^2 \neq 4 \\ \frac{1}{8}(\sin 2t - 2t\cos 2t & \omega^2 = 4 \end{cases}$$

<u>Beispiel</u> (System von DGL)

$$\dot{x} = x + y \qquad x(0) = 1$$
$$\dot{y} = x - y \qquad y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(x) - 1 &= \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y) \\ s\mathcal{L}(y) &= \mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} (s-1)\mathcal{L}(x) - \mathcal{L}(y) &= 1 \\ -\mathcal{L}(x) + (s+1)\mathcal{L}(y) &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{s+1}{s^2-2} \qquad \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s^2-2}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\cosh\sqrt{2}t \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh\sqrt{2}t$$

Eine lineare Temperaturregelung

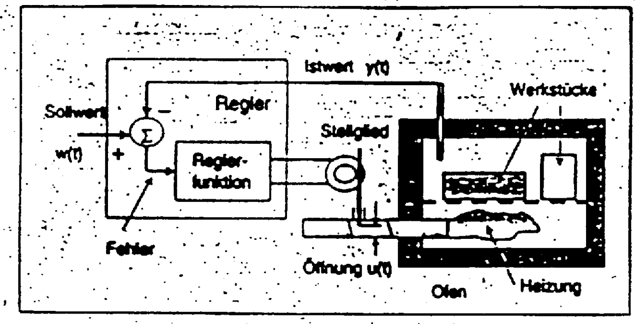
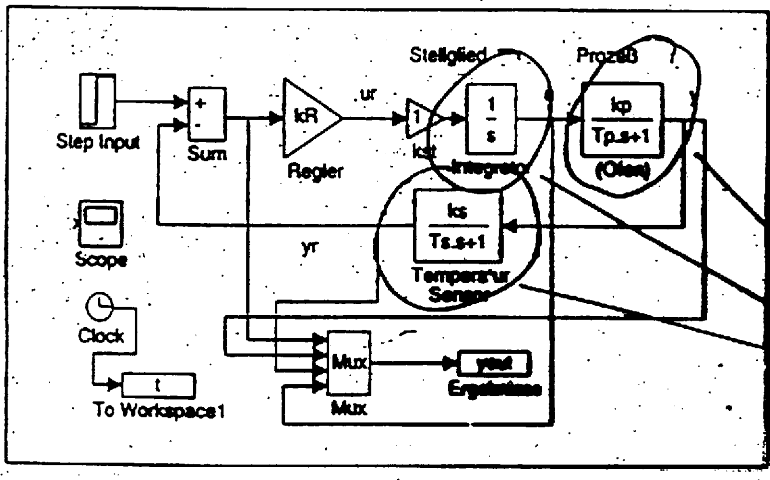


Bild 6.6 Skizze der Temperaturregelung eines Ofens



Beachte!

Bild 6.9 SIMULINK-Modell mit Transfer-Function-Blöcken aus der Linear-Bibliothek (s_templ.m; s_templ.mdl; p_templ.m; d_templ.m)

SIMULINK - Modell

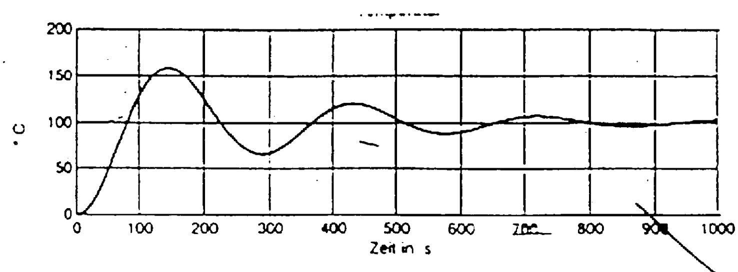


Bild 6.10 Sprungantwort der Temperaturregelung mit $k_R = 50$ (s_templ.m; s_templ.mdl; p_templ.m; d_templ.m; templl.m)

ERGEBNIS