20100 8

1

Differentialgleichungen

<u>Motivation</u>: Modellierung von Naturvorgängen

$u(t)$ zeitabhängiger Prozeß

<u>Annahmen</u>

i.) Wir beherrschen den Prozeß für kleine Zeitspannen Δt, d.h. wir haben "eine Idee" davon, wie sich $u(t)$ während Zeitspanne Δt verändert

ii) Änderungen hängen nur ab vom Zeitpunkt t, dem bestehenden Zustand und der Länge des Beobachtungszeitraums Δt

iii) Bei t ist Änderung von $u(t)$ proportional zu Δt

Unter diesen 3 Hypothesen haben wir für Änderung

$$\Delta u := u(t+\Delta t) - u(t) :$$

$$\Delta u = f(t, u(t))\, \Delta t$$

$f \mathrel{\widehat{=}}$ Idee vom Prozeß

101008

Wir erhalten

$$\underbrace{\frac{\Delta u}{\Delta t}}_{\frac{u(t+\Delta t)-u(t)}{\Delta t}} = f(t, u(t))$$

$$\xrightarrow{\Delta t \to 0} \boxed{u'(t) = f(t, u(t))}$$

Annahme i.) Naturvorgänge sind streng determiniert, d.h. $u_0 := u(t_0)$ bestimmt $u(t)$ mit $\boxed{}$ eindeutig.

②

Bsp 1: Künstliche Ernährung durch Glukoseinfusion

$u(t)$ Glukosegehalt bei t

$u_0 = u(0)$ Anfangsgehalt

β Gramm/Minute konstante Glukosezufuhrrate

Idee: "Glukoseabbau proportional zum vorhandenen Glukosegehalt

201008

Bilanz

Proportion. Konst.

$$u'(t) = -\alpha u(t) + \beta$$

Änderung = Abbau + Zufuhr

$$u(0) = u_0$$

Wie "lösen" wir dieses Problem?

Substituiere

$$z(t) := u(t) - \frac{1}{\alpha}\beta$$

$$\Longrightarrow z'(t) = u'(t) = -\alpha z(t)$$

③

$$z(0) = u(0) - \frac{1}{\alpha}\beta = u_0 - \frac{1}{\alpha}\beta =: z_0$$

Lösung: $z(t) = z_0 e^{-\alpha t}$

Probe: $z'(t) = \underbrace{-\alpha z_0 e^{-\alpha t}}_{-\alpha z(t)}$

Formale Herleitung:

$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = -\alpha z$$

bzw

$$\frac{dz}{z} = -\alpha\, dt$$

Integration $\longrightarrow$

$$\ln z(t) - \ln \underbrace{z(0)}_{z_0} = -\alpha t$$

201008

$\rightarrow \quad z(t) = z_0 e^{-\alpha t}$

$\rightarrow \quad u(t) = \frac{1}{\alpha}\beta + (u_0 - \frac{1}{\alpha}\beta) e^{-\alpha t}$

Fließgleichgewicht = ? $\approx$

$\lim_{t \to \infty} u(t) = \frac{\beta}{\alpha}$

Bsp ii) Absorption in homogenen Medien

$u(x)$ Energie am Ort x

$u(x_0) = u_0$ Energie am Ort $x_0 = 0$

(4)

Idee / Beobachtung:

Dringt Energie in ein homogenes Medium, so nimmt sie durch Absorption (= Umwandlung in andere Energieformen) ab und Abnahme proportional zur vorhandenen Energie

Bilanz

Proportion. Konst

$u'(x) = -\beta u(x)$

$u(0) = u_0$

Absorptionskoeffizient

201008 | (5)

Damit

$$u(x) = u_0 e^{-\beta x}$$

Halbwertlänge $= ? = \ell$

$$\frac{1}{2} u_0 = u_0 e^{-\beta \ell}$$

$$\Rightarrow \quad \ell = \frac{1}{\beta} \ln 2$$

Bsp iii) Höhenformel

$p(x)$ Druck, $\rho(x)$ Dichte der Atmosphäre in Höhe x über 0

Kraft, welche Atmosphären-Säule mit Grundfläche $A = 1$ und Höhe Δx ausübt: (g Erdbeschl.)

$$g \rho(x) \Delta x A$$

$$p(x) - p(x+\Delta x) = \frac{g \rho(x) \Delta x \cancel{A}}{\cancel{A}}$$

$$\rightarrow -p'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{p(x) - p(x+\Delta x)}{\Delta x} = g \rho(x)$$

201008

Boyle-Mariott für ideale Gase: konst. Temp.

$$\boxed{\frac{p(x)}{\varrho(x)} \equiv \frac{p_0}{\varrho_0}}$$

$$\rightarrow \quad \varrho(x) = \frac{\varrho_0\, p(x)}{p_0}$$

Damit

$$p'(x) = -g\,\varrho(x)$$

$$= -g \frac{\varrho_0}{p_0} p(x)$$

$$p(0) = p_0$$

$$\rightarrow \quad p(x) = p_0\, e^{-g \frac{\varrho_0}{p_0} x} \quad x \geq 0$$

(6)

Bsp. iv.) Logistisches Wachstum

$P(t)$ Populationsgröße zur Zeit t

$P(t_0)$ Ausgangspopulation

K Maximalgröße, sogenannte Trägerkapazität

<u>Idee</u> Wachstumsrate prop. zur vorhandenen Population und der verbleibenen Kapazität $K - P(t)$

7

20100?

Damit

$$P'(t) = \overbrace{\lambda P(t)(K - P(t))}^{\lambda K P(t) - \lambda P^2(t)}$$

$$P(t_0) = P_0$$

Berechnung der Lösung

$$P(t) = \frac{K}{1 - \left(\frac{K}{P_0} - 1\right) e^{-\lambda K (t - t_0)}}$$