27.10.08

Lineare, inhomogene DGL erster Ordnung

$$y'(t) = \alpha(t)\, y(t) + s(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

ergibt sich die Lösungsdarstellung

$$y(t) = \underbrace{y_0\, e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi)\, d\xi}}_{= y_h(t) \text{ homogene Lösung}} + \underbrace{e^{\int_{t_0}^{t} \alpha(\xi) d\xi} \int_{t_0}^{t} s(\xi)\, e^{-\int_{t_0}^{\xi} \alpha(\tau)\, d\tau}\, d\xi}_{y_p(t) \text{ partikuläre Lösung}}$$

(1)

Es gilt $y_h'(t) = \alpha(t)\, y_h(t)$

und $y_p'(t) = \alpha(t)\, y_p(t) + s(t)$

<u>Merke</u>: Ansatz für partikuläre Lösung falls $\alpha(t) \equiv \alpha$ konstant, d.h. unabhängig von t

$s(t)$	Ansatz $y_p(t)$
$\sum_{k=0}^{m} b_k t^k$	$\sum_{k=0}^{m} A_k t^k$,
$\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right) e^{at}$	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right) e^{at}$, $\alpha \neq a$
	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right) t\, e^{at}$ $\alpha = a$

27.10.08

$s(t)$	$y_p(t)$
$\left.\begin{matrix}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right)\cos bt \\ \left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right)\sin bt\end{matrix}\right\}$	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right)\cos bt + \left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right)\sin bt$
$\left.\begin{matrix}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right)e^{at}\cos bt \\ \left(\sum_{k=0}^{m} b_k t^k\right)e^{at}\sin bt\end{matrix}\right\}$	$\left(\sum_{k=0}^{m} A_k t^k\right)e^{at}\cos bt + \left(\sum_{k=0}^{m} B_k t^k\right)e^{at}\sin bt$

Bsp.: i) $y'(t) = \alpha y(t) + \beta$

$s(t) \equiv \beta \longrightarrow$ Ansatz für $y_p(t)$:

$y_p(t) = A$

2

$$y_p'(t) = A' = 0$$
$$= \alpha y_p(t) + \beta$$
$$= \alpha A + \beta$$
$$\Longrightarrow A = -\beta/\alpha = y_p(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$
$$= C e^{\alpha t} - \beta/\alpha$$

AWe gegeben: $y(t_0) = y_0$

$$y(t_0) = y_0 = C e^{\alpha t_0} - \beta/\alpha$$
$$\Longrightarrow C = e^{-\alpha t_0}(y_0 + \beta/\alpha)$$

ii) $y'(t) = 2y(t) + 1 + t^2$

d.h. $\alpha = 2$, $s(t) = 1 + t^2$

211008

<u>Ansatz</u> $y_p(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$

In DGL

$y_p'(t) = A_1 + 2A_2 t$

$= 2\, y_p(t) + 1 + t^2$

$= 2(A_0 + A_1 t + A_2 t^2) + 1 + t^2$

Koeffizientenvergleich

$0 = 2A_0 + 1 - A_1 \Rightarrow A_0 = -3/4$

$0 = 2A_1 - 2A_2 \Rightarrow A_1 = -1/2$

$0 = 2A_2 + 1 \Rightarrow A_2 = -1/2$

Also

$y_p(t) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2$

$y(t) = c_1\, e^{2t} - \frac{1}{4}(3 + 2t + 2t^2)$ ✓

(3)

Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen

$$y'(t) = \frac{g(t)}{h(y(t))} \qquad (*)$$

Zusammenhang mit $y'(t) = f(t, y(t))$:

$$f(t,y) = g(t)/h(y)$$

Formale Lösung von (*)

$$\int y'(t)\, h(y(t))\, dt = \int g(t)\, dt + c_1$$

$t = y$ liefert

$$\int h(y)\, dy = \int g(t)\, dt + c_1$$

bzw mit $G(t) = \int_a^t g(s)\,ds$, $H(y) = \int_b^y h(s)\,ds$:

27.10.08

$H(y(t)) = G(t) + C_1$, also

$y(t) = H^{-1}(G(t) + C_1)$

Bsp: i) $y'(t) = t\, y(t)$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int t\, dt + C_1$

und $g(t) = t$, $h(y) = \frac{1}{y}$

$\Rightarrow \ln(y) = \frac{1}{2} t^2 + C_1$

$\Rightarrow y(t) = \pm e^{C_1} e^{t^2/2}$

ii) $y' = t\, y^2$ $g(t) = t$, $h(y) = y^{-2}$

$y(t) = \frac{1}{C_1 - \frac{1}{2} t^2}$

4 iii) $y'' = -\frac{(y')^2}{5y}$

$v(y) := y' \rightarrow y'' = v'(y)\, y'$

$= v'(y)\, v(y)$

$= v' v$

Damit

$v' v = -\frac{v^2}{5y}$ bzw

$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{5y}$

$\rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{5} \ln|y| + C_1$

$\Rightarrow v(y) = C_1\, y^{-\frac{1}{5}}$

$\overset{v(y) = y'}{\Longrightarrow} y' = C_1\, y^{-\frac{1}{5}}$

$\rightarrow \int y^{1/5}\, dy = C_1 x + C_2$

Damit

$$\frac{5}{6} y^{6/5} = c_1' x + c_2'$$

$$\Rightarrow \quad y = \left[c_3' x + c_4' \right]^{5/6} ,$$

mit c_3', c_4' über Anfangsbedingungen zu bestimmen

Ähnlichkeits-Differentialgleichungen.

$$y'(t) = \phi\left(\frac{y(t)}{t} \right) \quad \text{Fall a)}$$

Substitution $u = \frac{y}{t}$ bzw

$y = tu$. Damit

$$y'(t) = u(t) + t\,u'(t) = \phi(u(t))$$

Damit

$$u'(t) = \left(\phi(u(t)) - u(t)\right) / t$$

$$= \frac{1/t}{1/(\phi(u(t)) - u(t))}$$

$$= \frac{g(t)}{h(u(t))}$$

mit $g(t) = 1/t$, $h(u) = \frac{1}{\phi(u) - u}$

Das ist DGL mit trennbaren bzw getrennten Variablen.

<u>Bsp</u>: $y'(t) = \frac{t\,y(t)}{t^2 - y(t)^2}$

$$= \frac{y(t)/t}{1 - \left(y(t)/t\right)^2} = \phi\left(\frac{y(t)}{t} \right)$$

27.10.08

mit $\phi(u) = \frac{u}{1-u^2}$. Also

$$\int \frac{du}{\phi(u)-u} = \int \frac{dt}{t} + c_1$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1-u^2}{u^3}\, du = \ln|t| + c_1$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|t| + c_1$$

$$\overset{u = y/t}{\longrightarrow} \quad y(t) = e^{-c_1} e^{-t^2/2y(t)^2}$$

Achtung: Hier ist $y(t)$ nur implizit gegeben

Ähnlichkeits Differentialgleichungen

$y'(t) = \phi(at + by(t) + c_1)$, $b \neq 0$

Fall b)

⑥ Substitution $z = at + by + c_1$

Damit

$$z'(t) = a + b\,y'(t)$$

$$\Rightarrow y'(t) = \frac{z'(t) - a}{b} = \phi(z(t))$$

$$\Rightarrow z'(t) = a + b\,\phi(z(t))$$

stellt DGL mit getrennten Variablen dar.

Bsp: $y'(t) = (2t + 3y(t))^2$

d.h. $a = 2$, $b = 3$, $c_1 = 0$, $\phi(x) = x^2$

Substitution: $z(t) = 2t + 3y(t)$

$$\Rightarrow z'(t) = 2 + 3\,z(t)^2$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{2+3z^2} = \int dt + c_1$$

27.10.08

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{6}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, z(t)\right) = t + c_1$

$\Rightarrow z(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \tan\left(\sqrt{6}\,(t+c_1)\right)$

$\Rightarrow$

$y(t) = \frac{1}{3}\left[\sqrt{\frac{2}{3}} \tan(\sqrt{6}\,(t+c_1)) - 2t\right]$.

Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertaufgaben

Sei $f: D_f \to \mathbb{R}$ mit

$D_f := [-a, a] \times [-b, b]$

und $(t_0, y_0) \in D_f$. Betrachte

AWP

$y'(t) = f(t, y(t))$

$y(t_0) = y_0$

⊕

i) Ist f stetig auf D_f, so besitzt das AWP mindestens eine Lösung $y(t)$ mit $y(t_0) = y_0$

ii) Sei $M := \max\limits_{(t,y) \in D_f} |f(t, y)|$ und

$h := \min\left(a, \frac{b - |y_0|}{M}\right)$

Ist jetzt die Funktion f Lipschitz-stetig bzgl. y, d.h. gilt

$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

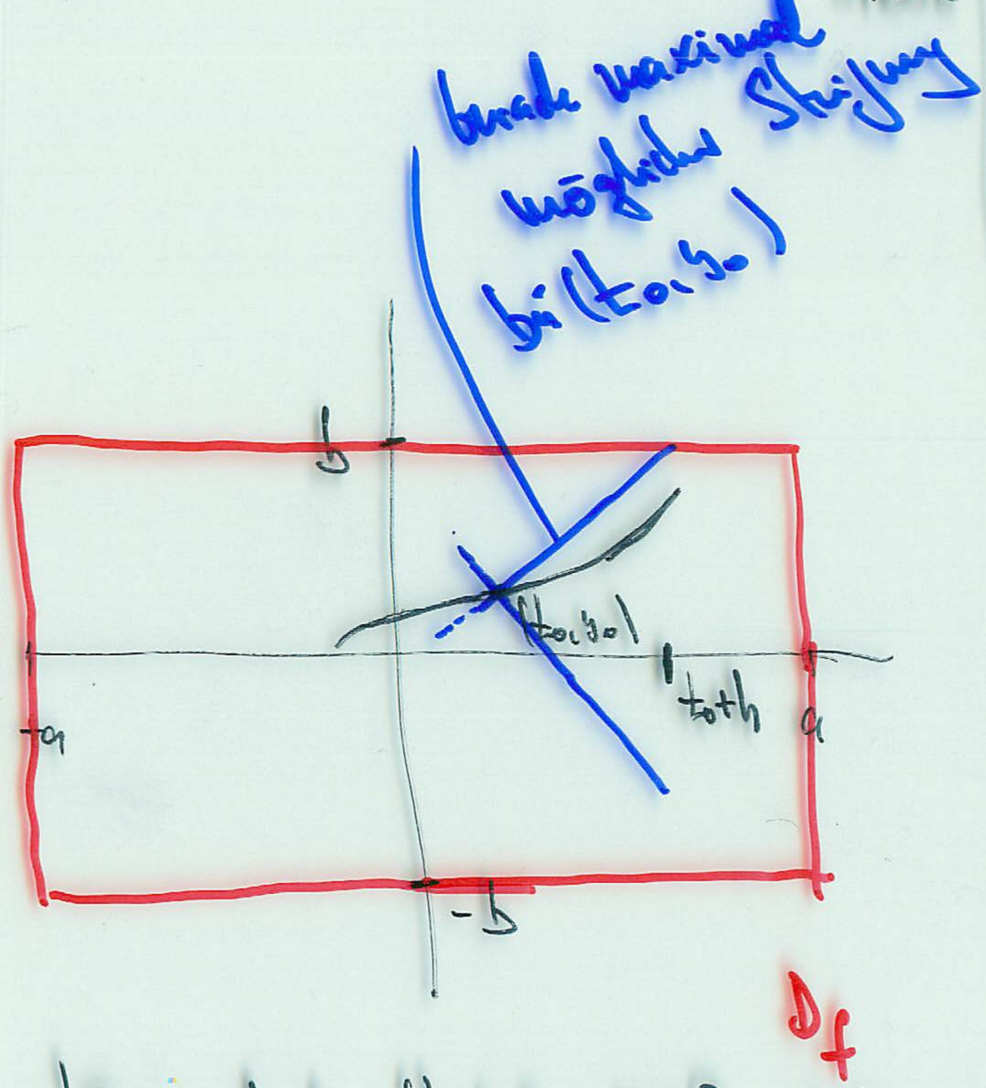
für alle $(t, y_1), (t, y_2) \in D_f$

mit einer Konstanten $L > 0$, so

besitzt AWP auf

$U_h(t_0) := \{t; |t - t_0| < h\}$ genau eine Lösung $y(t)$

27.10.08



Lösung durch (t_0,y_0) muß im Kegel verlaufen und verlässt D_f frühestens bei $t+h$.

⑧

Bsp Nicht - Eindeutigkeit

$$y' = \sqrt{|y|} \qquad y(t_0) = 0$$

Lösungen:

i.) $y(t) \equiv 0$

ii) $y(t) = \frac{1}{4}(t+c_1)^2 \quad (t > -c_1)$

iii) $y(t) = -\frac{1}{4}(t+c_1)^2 \quad (t < -c_1)$

Setze Lösung bei gegebenem t_0 aus i.), ii), iii) zusammen.

Dabei bestehen ∞-viele Möglichkeiten.

Grund: $t \mapsto \sqrt{t}$ nicht Lipschitz-stetig in Umgebung von $t=0$!