101108

Bsp.: Inhomogenes, lineares DGL-System

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t)]^t, \quad \text{d.h. } n=2$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{t(1+t^2)} & \frac{1}{t^2(1+t^2)} \\ -\frac{t^2}{1+t^2} & \frac{1+2t^2}{t(1+t^2)} \end{bmatrix}$$

$$g(t) = \begin{bmatrix} 1/t \\ 1 \end{bmatrix} \qquad t>0!$$

Ziel: Gib allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

an.

(1)

Bem.: $y^1(t) := \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \; y^2(t) = \begin{bmatrix} -1/t \\ t^2 \end{bmatrix} \; (t>0)$

bilden Fundamentalsystem von

$$y' = A(t)\, y,$$

denn

$$(y^i)'(t) = A(t)\, y^i(t) \qquad i=1,2 \quad \checkmark$$

$$W(t) = \det Y(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 + t^2 \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$ y^1, y^2 bilden FS.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{bmatrix}$$

101108

$$y_p(t) = Y(t)\int Y(t)^{-1} g(t)\,dt$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \int \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t^2 & 1/t \\ -t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/t \\ 1 \end{bmatrix} dt$$

[Erinnerung inverse einer 2x2 Matrix

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}_{\det A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$]

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \int \frac{1}{1+t^2}\begin{bmatrix} t+1/t \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1/t \\ t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int \frac{1}{t}\,dt \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln t \\ t\ln t \end{bmatrix}$$

②

Allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 y^1(t) + c_2 y^2(t) + y_p(t)$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1/t \\ t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ln t \\ t\ln t \end{bmatrix}$$

Anfangswertvorgabe

i.) $y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, d.h.

$$= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 1, \quad c_2 = 0$

ii) $y(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}$

iii) $y(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

<u>Wichtiger</u> <u>Spezialfall</u>: A unabhängig von t!, d.h. es liegt eine DGL (System) mit konstanten Koeffizienten vor;

$$y'(t) = A\, y(t) + g(t), \quad A \text{ konstante}$$

$n \times n$-Matrix.

<u>Beobachtung</u>: sei v Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, d.h. es gilt

$$A v = \lambda v$$

Dann löst $y(t) := e^{\lambda t} v$ die homogene DGL

$$y'(t) = A\, y(t), \quad \text{denn}$$

$$y'(t) = \left(e^{\lambda t} v\right)' = \lambda e^{\lambda t} v$$

$$= e^{\lambda t} \underbrace{\lambda v}_{A v} = e^{\lambda t} A v = A\left(e^{\lambda t} v\right)$$

$$= A\, y(t)$$

<u>Ergo</u>: Sind die Eigenwerte λ der Matrix A mit den zugehörigen Eigenvektoren bekannt, so können wir Lösungen des homogenen Systems angeben, denn

$$y(t) = e^{\lambda t} v$$

ist dann immer Lösung von

$$y' = A y \quad !$$

10.11.08

Fall 1: A reell, diagonalisierbar,

d.h. es gibt eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Sei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ EW'e mit Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k$, $r_1 + \dots + r_k = n$

und EV'en v_{ji} $(i = 1, \dots, r_j,$
$j = 1, \dots, k)$,

d.h. $A v_{ji} = \lambda_j v_{ji}$ $j = 1, \dots, k$

Dann löst

$$\begin{aligned} y(t) := {} & e^{\lambda_1 t}\{c_{11} v_{11} + \dots + c_{1r_1} v_{1r_1}\} + \\ + {} & e^{\lambda_2 t}\{c_{21} v_{21} + \dots + c_{2r_2} v_{2r_2}\} + \\ & \vdots \\ + {} & e^{\lambda_k t}\{c_{k1} v_{k1} + \dots + c_{kr_k} v_{kr_k}\} \end{aligned}$$

(4) das homogene DGL-System und

$$Y(t) = [e^{\lambda_1 t} v_{11} \dots e^{\lambda_1 t} v_{1r_1} \dots e^{\lambda_k t} v_{k1} \dots e^{\lambda_k t} v_{kr_k}]$$

ist Matrix eines FS.

[charakt. Polynom von A

$$= \pm(\lambda - \lambda_1)^{r_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{r_k}$$]

es gilt

$$W(t) = \det Y(t)$$

$$= e^{r_1 \lambda_1 t} \dots e^{r_k \lambda_k t} \det[v_{11} \dots v_{1r_1} \dots v_{k1} \dots v_{kr_k}]$$

$$= e^{r_1 \lambda_1 t} \dots e^{r_k \lambda_k t} \det[v_{11} \dots v_{1r_1} \dots v_{k1} \dots v_{kr_k}]$$

$\neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$, denn $v_{11}, \dots, v_{1r_1}, \dots$
$\dots, v_{k1}, \dots, v_{kr_k}$ Basis des $\mathbb{R}^n$.

10.11.08

Fall 2: A reell, aber beliebig, d.h. nicht unbedingt diagonalisierbar. Interessanter Fall

λ_i EW von mit

$\dim \operatorname{Eig}(\lambda_i) < r_i$ = Vielfachheit des EWes λ_i

Jordan'sche Normalform:

es gibt r_i linear unabhängige Lösungen $v_{i1}, \dots, v_{ir_i}$ von

$$(A - \lambda_i I)^{r_i} v = 0,$$

die sogenannten Hauptvektoren

⑤ Damit bilden

$$y_{ij}(t) := e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij}$$

$j = 1, \dots, r_i$

linear unabhängige Lösungen von

$$y' = A y$$

$$y_{ij}'(t) = \lambda_i e^{\lambda_i t} \sum_{k=0}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij} +$$

$$+ e^{\lambda_i t} \sum_{k=1}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij}$$

$$= e^{\lambda_i t} \Big\{ \lambda_i \sum_{j=0}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij} + \sum_{k=0}^{r_i - 2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij} \Big\}$$

$(A - \lambda_i I)^{r_i} v_{ij} = 0$

$$= e^{\lambda_i t} A \sum_{k=0}^{r_i - 1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda_i I)^k v_{ij} = A y_{ij}$$

10 11 08

<u>Merke</u>: Sind EWe von A bekannt, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit Vielfachheiten $r_1, \dots, r_k$, und sind Basen der $\mathrm{Hau}(\lambda_i)$ bekannt, so können wir ein FS von

$$y' = Ay$$

wie oben angeben.

<u>Bsp</u>: Es sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (Jordan Block zu 2)

$y' = Ay$ soll mit FS versehen werden

ⓑ $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^3$

$\mathrm{rg}(A - \lambda I) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Eig}(2) = 1 < 3 = r_1$

Wir haben

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ EV

Hauptvektoren w, x

$(A - \lambda I) w = v \Rightarrow w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow (A - \lambda I)^2 w = (A - \lambda I) v = 0$ (v EV ✓)

$(A - \lambda I) x = w \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow (A - \lambda I)^3 x = 0$ ✓

101208

(7)

Damit $v_{11} := v$, $v_{12} := w$, $v_{13} := x$

und $y_{1k}(t) = e^{2t} \sum_{j=0}^{2} \frac{t^j}{j!} \cdot (A - 2I)^j \, v_{1k}$, $k = 1, 2, 3.$