

Differentialgleichungen I

Michael Hinze
(zusammen mit Peywand Kiani)

Department Mathematik
Schwerpunkt Optimierung und Approximation, Universität Hamburg



24. November 2008

Beachtungswertes

- ▶ Die Veranstaltung ist eng angelehnt an das Buch **Höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler** von Prof. Dr. Günter Bärwolff, Spektrum Akademischer Verlag, ASIN/ISBN: 3827414369.
- ▶ Übungsaufgaben → <http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>
- ▶ Besuch der Übungsgruppen gründlich vorbereiten!!
- ▶ Übungshefte: **Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, H. Wenzel / G. Heinrich, ab 4ter Auflage, gibt es bei Teubner Stuttgart/Leipzig.
- ▶ Als Formelsammlung empfehlen wir: **Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler**, Klaus Veters, 3. Auflage, Teubner 2001.

Übungsaufgaben für die kommenden beiden Wochen

Siehe WWW Seiten der Veranstaltung:

<http://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/>

Definition 6.3: Folgt aus der Beziehung

$$\alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x) + \cdots + \alpha_n(x)y_n(x) = 0 \text{ auf } [a, b]$$

für n Lösungen y_1, \dots, y_n einer homogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0$$

n -ter Ordnung das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten, also $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, so heisst y_1, y_2, \dots, y_n Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung n -ter Ordnung.

Definition 6.4: Seien y_1, y_2, \dots, y_n beliebige Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung, dann heißt

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

WRONSKI–**Determinante** dieser n Lösungen.

Buch Kap. 6.8 – Lösbarkeit DGL n -ter Ordnung

Satz 6.10: Die Funktionen $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, seien stetig auf $[a, b]$.

a) Dann gibt es ein Fundamentalsystem y_1, \dots, y_n von

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0$$

und jede Lösung der Differentialgleichung besitzt die Form

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit geeigneten Koeffizienten c_1, \dots, c_n .

b) Je n Lösungen der homogenen Differentialgleichung bilden ein Fundamentalsystem, wenn ihre WRONSKI–Determinante $W(x)$ nirgends auf $[a, b]$ verschwindet (Gilt $W(x_0) \equiv 0$ für ein $x_0 \in [a, b]$, so folgt daraus $W(x) \equiv 0$ auf ganz $[a, b]$).

- c) Sei die Funktion $g(x)$ stetig auf $[a, b]$. Sei $y_p(x)$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = g(x) .$$

Ist dann y_1, \dots, y_n ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, so sind durch

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

mit Konstanten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ alle Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung n -ter Ordnung erfasst.

Buch Kap. 6.8 – Inhomogene Differentialgleichungen 2-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung der DGL

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = g(x)$$

hat die Form

$$y(x) = \left[C_1 - \int \frac{y_2(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_1(x) + \left[C_2 + \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)} dx \right] y_2(x),$$

wobei y_1, y_2 ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bildet.