Department Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2008/2009**
Prof. Dr. M. Hinze/ Dr. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1: In einem Zweipopulationenmodell (Räuber–Beute–Modell) bezeichne $x(t)$ die Population der Beutespezies, $y(t)$ die der Räuberspezies zur Zeit t. Das zeitliche Wachstum der Populationen werde durch das folgende Differentialgleichungssystem beschrieben

$$\begin{aligned} x' &= x\,(4 - x - y) \\ y' &= y\,(-2 + x - y). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte dieses Systems und untersuchen Sie diese auf ihre Stabilität.

Aufgabe 2:

a) Die Differentialgleichung des gedämpften mathematischen Pendels lautet

$$\ddot{\Phi} = -\omega^2 \sin\Phi - 2\,c\,\dot{\Phi}.$$

Dabei seien $\omega, c > 0$. Untersuchen Sie die Gleichgewichtslage $\Phi_0 = 0$ auf Stabilität.

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 - 2\,x\,y^2 \\ y' &= x^2\,y - y^3 \end{aligned}$$

Welche Aussage können Sie über die Stabilität der Gleichgewichtslage $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ machen?

Aufgabe 3: Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} x_1' &= 7\,x_1 + 4\,x_3, & x_1(0) - x_1(b) &= 2 \\ x_2' &= 8\,x_1 + 3\,x_2 + 8\,x_3, & x_2(0) + 2\,x_2(b) &= -1 \\ x_3' &= -8\,x_1 - 5\,x_3, & x_3(0) - x_3(b) &= 1 \end{aligned}$$

Formulieren sie das Randwertproblem in Matrixschreibweise und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems. Für welche Werte $b \neq 0$ ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar ?

Aufgabe 4: Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$y'' + 2y' + y = h(x) \qquad x \in]0,1[$$

$$\begin{aligned} y(0) - y(1) &= \gamma_1 \\ \alpha y'(0) + 2y(1) &= \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[0,1]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

Abgabetermine: 26.1. – 30.1.2005 **vor** der Übung.