Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x)\,(x^2+1) = (y(x)+5)\,2x\,.$$

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0.5$$

Durch

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & x^3 \\ \frac{1}{x^2} & 3x^2 \end{pmatrix}$$

ist ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Aufgabe gegeben.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $y(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von

$$y'' + 5y' + 6y = te^{-t}.$$

b) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} y - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Funktionen

$$\boldsymbol{y}^{[1]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}^{[2]} := \begin{pmatrix} \cos(t)-1 \\ -1-\sin(t) \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}^{[3]} := e^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}^{[4]} := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind Lösungen des zugehörigen homogenen Systems.

Prüfen Sie, ob diese Funktionen ein Fundamentalsystem bilden.