Aufgabe 1)

a) Gegeben ist das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \boldsymbol{h}(t)$

$$\text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{h}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

(ii) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Ansatzes eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems.

b) Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - x\,y' + y = h(x) \qquad x \in]1,3[$$

$$y(1) + \alpha y'(1) = \gamma_1$$
$$y(3) - 3y'(3) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = x\,, \qquad y_2(x) = x \cdot \ln(x)$$

bilden ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1,3]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

Lösung:

a) (i) [**4 Punkte**] Lösung des homogenen Systems:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2$$

$$\text{also} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -1\,.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \qquad 2v_1 = v_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum hat die Dimension 1. Es wird ein Hauptvektor benötigt.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad 2w_1 - 1 = w_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1e^{-t} & (t+0.5)e^{-t} \\ 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{pmatrix} \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1e^{-t} & (t+0.5)e^{-t} \\ 2e^{-t} & 2te^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(ii) [**2 Punkte**]
Partikuläre Lösung der Inhomogenen Aufgabe:
Setzt man den Ansatz $y_p(t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ in das System ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
&0 = a - b + 1 \iff b = a + 1 \\
&0 = 4a - 3b + 3 \; = \; 4a - 3a - 3 + 3 \iff a = 0\,, b = 1\,.
\end{aligned}$$

b) [**4 Punkte**] Es gilt $y_2'(x) = 1 + \ln(x)$ und

$$\begin{aligned}
R_1(y_1) &= y_1(1) + \alpha {y_1}'(1) = 1 + \alpha\,, \\
R_1(y_2) &= y_2(1) + \alpha {y_2}'(1) = 0 + \alpha\,,\,, \\
R_2(y_1) &= y_1(3) \; - \; 3{y_1}'(3) = 3 - 3 = 0\,, \\
R_2(y_2) &= y_2(3) \; - \; 3{y_2}'(3) = 3\ln(3) - 3(1 + \ln(3)) = -3\,.
\end{aligned}$$

Die RWA ist genau dann für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, h(x)$ eindeutig lösbar, wenn die Martrix

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1 + \alpha & \alpha \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

regulär ist. Also genau dann, wenn

$$-3\alpha \; - \; 3 \neq \; 0 \iff \alpha \neq \; -1.$$

Aufgabe 2)

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Substitution $u := x - 2y$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(x - 2y) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

b) Gegeben sei das lineare System

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & -\gamma & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}\,.$$

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten des stationären Punktes $(0,0,0)^T$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\gamma \in \mathbb{R}$.

Lösungsskizze zur Aufgabe 2)

a) $u = x - 2y \Longrightarrow y = \dfrac{x-u}{2} \Longrightarrow y' = \dfrac{1-u'}{2}$.

$$\frac{1-u'}{2} = \exp(u) + 0.5 \iff u' = -2e^u \qquad \text{[2 Punkte]}$$

$$\int -e^{-u}\,du = \int 2dx \iff e^{-u} = k + 2x \iff -u = \ln(k+2x)$$

$$2y = x + \ln(k+2x) \wedge y(0) = 0 \iff y(x) = \frac{1}{2}\left(x + \ln(1+2x)\right)$$

[2 Punkte]

b) Charkteristisches Polynom : $P(\lambda) = (-\gamma - \lambda)[(3+\lambda)^2 - 9]$. [1 Punkt]

Eigenwerte : $\lambda_1 = -\gamma, \quad \lambda_2 = -3 + 3 = 0 \quad \lambda_3 = -3 - 3$ [1 Punkt]

$\gamma > 0 \iff \lambda_1, \lambda_3 < 0,\ \lambda_2 = 0$ einfacher EW: stabil

$\gamma < 0 \iff \lambda_1 > 0$: instabil [2 Punkte]

$\gamma = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -6$

Eigenraum zum doppelten EW Null:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \iff v_3 = v_1$$

Eigenvektoren:

$$v^{[1]} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v^{[2]} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenraum des algebraisch zweifachen Eigenwertes Null hat die Dimension zwei. Die Nulllösung ist stabil. [2 Punkte]