

# Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser  
Fachbereich Mathematik  
Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg  
Wintersemester 2009/10

## Kapitel 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 1.1 Einführung und Beispiele

#### Definition:

Ein Gleichungssystem der Form

$$F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$F : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{(m+1)\text{-fach}} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt ein **implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung  $m$** .

Läßt sich das System nach  $y^{(m)}(t)$  auflösen, so ergibt sich das **explizite System** der Form:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))$$

Im Folgenden suchen wir stets eine  $C^m$ -Funktion

$$\mathbf{y} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt, d.h. es gilt

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

für alle  $t \in [a, b]$  beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

**Spezialfall:**

Hängen die Funktionen  $\mathbf{F}$  bzw.  $\mathbf{f}$  nicht explizit von (der Zeit)  $t$  ab, so nennt man das System **autonom**, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \dots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch **Trajektorien** der DGL.

**Beispiel:** Die skalare Gleichung erster Ordnung

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t, \quad C \in \mathbb{R}$$

**Problem 1:** (Anfangswertaufgabe)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_a \quad (\text{Anfangswert})$$

**Problem 2:** (Randwertaufgabe)

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad a \leq t \leq b, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) = 0 \quad (\text{Randwert})$$

$$\mathbf{r} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

### Beispiel: Populationsmodell I

Sei  $N(t)$  = Größe einer Population, z.B. Bakterien auf Nährboden  
Änderung in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

$$b = \text{Geburtenrate} \quad d = \text{Sterberate}$$

Damit gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b - d)N(t)$$

Im Grenzwert  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man die **Differentialgleichung**:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t), \quad \alpha = b - d$$

Mit der Anfangsbedingung  $N(t_0) = N_0$  erhält man die eindeutige Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

⇒ **Exponentielles Wachstum**

### Beispiel: Populationsmodell II

Bei exponentiellem Wachstum gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty$$

**Unrealistisch!**

Suche Modell mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K < \infty$$

**Verhulst:** Wachstumsrate ist eine mit  $N(t)$  linear fallende Funktion

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t-t_0)}}$$

⇒ **Logistisches Wachstum**

### Beispiel: Regelkreisglied

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung:

$$y_e(t) = \text{vorgegebene Eingangsgröße}$$

$$y_a(t) = \text{Ausgangsgröße}$$

$$K_F = K(y_e - y_a) = \text{Federkraft}$$

$$K_D = r \dot{y}_a(t) = \text{Dämpferkraft}$$

wobei  $K$  Federkonstante und  $r$  Dämpfungskoeffizient.

### Differentialgleichung

$$\dot{y}_a(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t), \quad \lambda = \frac{K}{r}$$

Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von  $y_e(t)$ ,  $t \geq t_0$ :

$$y_a(t) = y_a(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^t y_e(\tau)e^{\lambda(\tau-t)} d\tau$$

### Beispiel: Newtonsche Abkühlung

Temperatur  $T(t)$  eines homogenen Körpers (räumlich gemittelt):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m} (T_a(t) - T(t))$$

wobei

$$T_a(t) = \text{Umgebungstemperatur}$$

$$m = \text{Masse des Körpers}$$

$$F = \text{Oberfläche}$$

$$c = \text{spezifische Wärme}$$

$$k = \text{Proportionalitätsfaktor}$$

**Differentialgleichung** ist identisch mit der des Regelkreisglieds!!

Insbesondere gilt:  $T(t) \rightarrow T_a(t)$  für  $t \rightarrow \infty$

## Beispiel: Elektrischer Schwingkreis

Gegeben seien:

$R =$  Ohmscher Widerstand

$L =$  Induktivität

$C =$  Kapazität

Für die Spannungsabfälle gilt:

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \dot{I}, \quad I = C \cdot \dot{U}_C$$

sowie bei vorgegebener Spannung  $U(t)$ :

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Ersetze in  $U_R$  und  $U_L$  die Variable  $I$  durch  $C \cdot \dot{U}_C$ :

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = U(t)$$

## Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC \ddot{U}_C + RC \dot{U}_C + U_C = U(t)$$

**Typische Vorgabe:** Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

**Achtung:** Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \quad \text{und} \quad \dot{U}_C(t_0) = C_2$$

Schreibe Differentialgleichung auch als **System erster Ordnung:**

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{R}{L} y_2 - \frac{1}{LC} y_1 + \frac{1}{LC} U \end{aligned}$$

wobei  $y_1 := U_C$  und  $y_2 := \dot{U}_C$ .

**Richtungsfeld:** (einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung)

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (y(t) \in \mathbb{R})$$

Betrachte an jedem Punkt  $(t, y) \in \mathbb{R}^2$  den Richtungsvektor  $v = (1, y')^T$  in der Tangentenrichtung  $y' = f(t, y)$  (Richtungsfeld).

**Beispiel:** (auf Folie) Richtungsfeld der Differentialgleichung  $y' = y$ .

**Definition:** Ein Tripel  $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$  welches die Gleichung  $y' = f(t, y)$  erfüllt nennt man ein **Linielement** der Differentialgleichung.

“**Erraten**” der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

**Linielemente** der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel  $(t, y, -\frac{t}{y}) \in \mathbb{R}^3$ .

Richtungsvektor  $v$  im Punkt  $(t, y)$  ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad (\text{Ortsvektor})$$

Lösung sind (geometrisch gesehen) Kreise in der  $(t, y)$ -Ebene:

$$y(t) = \pm \sqrt{r^2 - t^2} \quad (-r < t < r)$$

## 1.2 Elementare Lösungsmethoden

### Typ A: Separierbare Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y)$$

in einem Bereich  $D$  der  $(t, y)$ -Ebene. Gilt  $g(y) \neq 0$ , so lassen sich die Variablen  $t$  und  $y$  **trennen**:

$$\frac{y'(t)}{g(y)} = f(t)$$

Integration mittels Substitutionsregel:

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Bezeichnen wir mit  $H(y)$  eine Stammfunktion von  $1/g(y)$ , also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$$

Da  $g(y) \neq 0$ , ist die Stammfunktion  $H(y)$  injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1} \left( H(y_0) + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right), \quad H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

**Beispiel:** Betrachte die Gleichung  $y' = -t/y$ :

$$yy' = -t \quad \Rightarrow \quad \int_{y_0}^y \eta d\eta = - \int_{t_0}^t \tau d\tau$$

Daraus folgt:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Unter Vorgabe einer Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0$$

erhalten wir die Lösungen in der Form

$$y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Dies sind gerade Kreise in der  $(t, y)$ -Ebene.

## Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

lassen sich durch die Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

auf separierbare Gleichungen zurückführen:

$$f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

Auflösung nach  $u'(t)$  ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}$$



**Beispiel:**

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der  $y$ -Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet also:

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$$

Substitution  $u = y/t$  ergibt:

$$u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{t}$$

Trennung der Variablen liefert zunächst:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\ln \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right) = -\ln |t| + C_1$$

Aus der Beziehung (siehe Analysis II)

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln \left( u + \sqrt{1 + u^2} \right)$$

folgt

$$u = \sinh(-\ln |t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^{C_1}}{t} - te^{-C_1} \right)$$

Wählt man  $C = e^{C_1}$ , so erhalten wir

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar:

$$t^2 = C^2 - 2Cy, \quad C = e^{C_1}$$

### Typ C: Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t)$$

mit **Inhomogenität**  $h(t)$ .

Man nennt die Gleichung **homogen**, falls  $h(t) = 0$ .

Die **allgemeine Lösung** lässt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

schreiben.

Dabei ist  $y_p(t)$  eine **spezielle** (partikuläre) Lösung und  $y_h(t)$  die **allgemeine** Lösung der homogenen Gleichung

$$y'_h(t) + a(t)y_h(t) = 0$$

ist.

## I. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung:

Trennung der Variablen

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + a(t)y_h(t) = 0$$

ergibt mittels Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = - \int a(t) dt$$

und man erhält die **allgemeine Lösung**

$$y_h(t) = C \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right)$$

mit einer beliebigen (Integrations-)Konstanten  $C \in \mathbb{R}$ .

## II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

Dazu verwendet man den Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right)$$

Einsetzen in die **inhomogene** Gleichung ergibt

$$C'(t) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) - a(t)y_p(t) + a(t)y_p(t) = h(t)$$

Durch **Integration** der Differentialgleichung für  $C(t)$  erhält man

$$C(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi \right) d\tau$$

### Spezialfälle:

Konstante Koeffizienten  $a(t) = \text{const.}$  und spezielle Form von  $h(t)$

Folgende **Ansätze** liefern dann **einfacher** eine spezielle Lösung

$h(t)$	$y_p(t)$
$\sum_{k=0}^m b_k t^k$	$\sum_{k=0}^m c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$b e^{\lambda t}$	$c e^{\lambda t}$ falls $\lambda \neq -a$ $c e^{\lambda t}$ falls $\lambda = -a$

**Beispiel:** Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^t d\tau\right) = C \cdot \exp(t_0 - t)$$

Variation der Konstanten

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp(t_0 - t)$$

Einsetzen ergibt

$$C(t) = \int_{t_0}^t \sin(\tau) \cdot \exp(\tau - t_0) d\tau$$

Bestimmung einer **speziellen** Lösung über den **Ansatz**

$$y_p(t) = C \sin(t - \gamma)$$

Einsetzen ergibt

$$C \cos(t - \gamma) + C \sin(t - \gamma) = \sin t$$

Additionstheoreme

$$C(\cos t \cos \gamma + \sin t \sin \gamma) + C(\sin t \cos \gamma - \cos t \sin \gamma) = \sin t$$

Daraus folgt

$$C \cos t (\cos \gamma - \sin \gamma) + C \sin t (\sin \gamma + \cos \gamma) = \sin t$$

sowie

$$\cos \gamma - \sin \gamma = 0, \quad \sin \gamma + \cos \gamma = \sqrt{2}, \quad C = 1/\sqrt{2}$$

### Typ D: Bernoullische Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^\alpha = 0 \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

lassen sich durch die Substitution

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$u'(t) + (1 - \alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

**Probleme** ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

**Zum Beispiel** kann  $y(t)$  (in endlicher Zeit) singular werden.

**Beispiel:** Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

Eine Lösung ist  $y(t) = 0$ . Substitution  $u(t) = 1/y(t)$  ergibt

$$u'(t) + u(t) = -t$$

Lösung  $u(t)$  besteht aus allgemeiner plus spezieller Lösung

$$u(t) = C \cdot e^t + 1 - t$$

Rücksubstitution

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^t} \quad (C \text{ Konstante})$$

**Konkretes Beispiel:**

Mit der Anfangsbedingung  $y(0) = 2$  existiert die Lösung nur auf dem Intervall  $[-1.6783\dots, 0.7680\dots]$ .

**Typ E: Riccatische Differentialgleichungen**

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:

Sei eine spezielle Lösung  $y_p(t)$  bekannt  $\Rightarrow$  Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

Dann löst  $u(t)$  die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

**Beispiel:** Gegeben sei die Riccatische Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t)$$

Man sieht direkt, dass  $y_p(t) = 1$  eine spezielle Lösung ist.

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Substitution  $u(t) = 1/(y(t) - 1) \Rightarrow y = 1 + 1/u$  liefert

$$\begin{aligned}u'(t) &= -u^2 y' \\ &= -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2\left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2}\right) \\ &= -tu(t) + t\end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichung:

$$u(t) = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

und damit

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

**Typ F: Exakte Differentialgleichungen**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$g(t, y(t)) + h(t, y(t)) y'(t) = 0$$

**Annahme:** Es existiert eine Funktion  $\Phi(t, y)$  mit:

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} = g(t, y), \quad \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = h(t, y)$$

Dann folgt

$$\frac{d\Phi(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y} y'(t) = 0$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind dann gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = C = \text{const.}$$

Man nennt die Differentialgleichung  $g + hy' = 0$  dann **exakt**.

**Analysis III:** Definiere ein **Vektorfeld**  $F(t, y)$ :

$$F(t, y) := (g(t, y), h(t, y))^T$$

Die Differentialgleichung heißt **exakt**, falls  $F$  ein **Potential** besitzt:

$$g(t, y) = \Phi_t(t, y), \quad h(t, y) = \Phi_y(t, y) \quad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Dies geht nicht immer: **Integrabilitätsbedingung**

**Satz:**

Sind die beiden Funktionen  $g(t, y)$  und  $h(t, y)$  stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld  $F$  ein Potential  $\Phi$  genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t, y)$$

erfüllt ist.

Berechnung des Potentials  $\Phi(t, y)$  über **Kurvenintegral**:

$$\Phi(t, y) = \int_{c(t,y)} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei bezeichnet  $c_{(t,y)}$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Kurve, die die Punkte  $(t_0, y_0)$  (fest) und  $(t, y)$  (variabel) verbindet.

Gilt  $D = \mathbb{R}^2$ , so kann man den **Hakenweg**

$$(t_0, y_0) \rightarrow (t, y_0) \rightarrow (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\Phi(t, y) = \int_{t_0}^t g(\tau, y_0) d\tau + \int_{y_0}^y g(t, \eta) d\eta$$



**Beispiel:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1 + 2ty + y^2) + (t^2 + 2ty)y' = 0 \quad ((t, y) \in \mathbb{R}^2)$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2ty) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 2ty + y^2) = 2(t + y)$$

ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, d.h. die Gleichung ist **exakt**.

**Berechnung des Potentials:**

**Erster Schritt**

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g = 1 + 2ty + y^2$$

Integration bezüglich  $t$  ergibt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

**Beachte:** Integrationskonstante kann von  $y$  abhängen!!

**Zweiter Schritt:** Wir haben bereits die Form

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2y + C(y)$$

Es muss aber noch gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2ty$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \Rightarrow C(y) = \text{const.}$$

(Implizite) Lösung der Gleichung

$$t(1 + y^2(t)) + t^2y(t) = C$$

## Methode des integrierenden Faktors:

Gegeben sei die **nicht** exakte Differentialgleichung

$$g(t, y) + h(t, y) y' = 0$$

Wir suchen nun eine Funktion  $m(t, y)$  so, dass die Gleichung

$$m(t, y)g(t, y) + m(t, y)h(t, y) y' = 0$$

eine **exakt** Differentialgleichung ist.

**Bedingung:** Integrabilitätsbedingung ist erfüllt!

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot h) - \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot g) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\left( h \frac{\partial m}{\partial t} - g \frac{\partial m}{\partial y} \right) + m \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) = 0$$

## Zwei einfache Sonderfälle:

1. Fall: Wir nehmen an, dass  $m = m(t)$  nur von  $t$  abhängt.

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / h \right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

**Bed.:** hängt nur von  $t$  ab

2. Fall: Wir nehmen an, dass  $m = m(y)$  nur von  $y$  abhängt.

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) / g \right]}_{\text{Bed.: hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

**Bed.:** hängt nur von  $y$  ab

In beiden Fällen erhalten wir eine **gewöhnliche** Differentialgleichung und die Lösung  $m$  ist ein integrierender Faktor!

**Beispiel:** Gegeben sei die **nicht** exakte Gleichung

$$(1 - ty) + (ty - t^2)y' = 0$$

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) / h = \frac{y - t}{ty - t^2} = \frac{1}{t}$$

Ansatz:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot m(t) \Rightarrow m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{t} - y\right) + (y - t)y' = 0 \quad (t \neq 0)$$

exakt und die (implizite) Lösung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = \ln |t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{const.}$$

### 1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

**Typ A:** Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Die rechte Seite der DGL hängt also nicht von  $y(t)$  ab.

Setzen wir  $z(t) := y'(t)$ , so erhält man eine Gleichung **erster** Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Lässt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t z(\tau) d\tau$$

**Beispiel:** Die sogenannte **Kettenlinie** ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Substitution  $z(t) := y'(t)$  ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt$$

und daher

$$z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten  $c_1$ .

Integration von  $z(t)$  ergibt die Kettenlinie  $y(t)$  in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k} \cosh(kt + c_1) + c_2$$

**Typ B:** Gegeben sei eine autonome Gleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall **streng monoton** ist, so existiert die Umkehrabbildung  $t = t(y)$  und

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Setzt man  $v(y) := y'(t(y))$ , so folgt

$$\frac{dv}{dy} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} f(y, v(y))$$

Differentialgleichung **erster Ordnung**

Ist die Lösung  $v(y)$  bekannt, so erhält man  $y(t)$  durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{y_0}^y \frac{dy}{v(y)}$$

**Typ C:** Betrachte man den Spezialfall einer autonomen Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} y'y'' &= f(y)y' \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(y')^2 &= \int f(y)dy =: F(y) + C \\ \Rightarrow y' &= \pm\sqrt{2(F(y) + C)} \end{aligned}$$

Die Funktion  $y(t)$  sei invertierbar (auf einem gewissen Bereich)

$$\frac{dt}{dy} = \pm \frac{1}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

und man erhält  $y(t)$  durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y) + C)}}$$

## Kapitel 2: Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten im Folgenden stets das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

Rechte Seite  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $D$  offen und  $y_0 \in D$ .

Die **Fragen**, die wir beantworten wollen: 3Y

- Existiert** eine Lösung  $y(t)$  in einer Umgebung  $|t - t_0| < \varepsilon$  der Anfangszeit?
- Ist diese Lösung **eindeutig** bestimmt?
- Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit **fortsetzen**?
- Wie **verändert** sich die Lösung bei Störung der Anfangsdaten  $(t_0, y_0)$  oder der rechten Seite  $f(t, y)$ ?

## 2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

**Beispiel:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \quad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt **beliebig viele** Lösungen: seien  $\alpha, \beta > 0$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t + \alpha)^2 & : -\infty < t \leq -\alpha \\ 0 & : -\alpha < t \leq \beta \\ \frac{1}{4}(t + \beta)^2 & : \beta < t < \infty \end{cases}$$

Eigenschaften der rechten Seite:

- 1) Die rechte Seite ist **stetig** und **beschränkt** auf  $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$ ,  
 $a > 0$ ,
- 2) Die rechte Seite ist dort **nicht** Lipschitz–stetig,
- 3) Die rechte Seite ist bei  $y = 0$  **nicht** differenzierbar.

### **Satz: (Existenzsatz von Peano (1890))**

Die rechte Seite  $f(t, y)$  sei auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  stetig und es gelte  $(t_0, y_0) \in D$ .

Dann existiert ein  $\varepsilon > 0$ , so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

im Intervall  $|t - t_0| < \varepsilon$  eine Lösung besitzt.

### **Konstruktiver Beweis mittels des Eulerschen–Polygonzug–Verfahrens:**

Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \quad y_{i+1} := y_i + h_i f(t_i, y_i)$$

mit den Startwerten  $(t_0, y_0)$ .

Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für  $h_i \rightarrow 0$ .

**Bemerkung:** Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall  $-\infty \leq t_{\min} < t < t_{\max} \leq \infty$  fortsetzen.

Der Graph  $(t, y(t))$  der Lösung kommt dabei für  $t \rightarrow t_{\min}$  bzw.  $t \rightarrow t_{\max}$  dem Rand von  $D$  beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von  $(t, y(t))$  für  $t \rightarrow t_{\min}$  bzw.  $t \rightarrow t_{\max}$  liegt auf dem Rand  $\partial D$ .

**Beispiel:**

1) Die Lösung  $y(t) = \exp(t)$  des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Also ist  $t_{\min} = -\infty$  und  $t_{\max} = \infty$ .

Es ist  $D = \mathbb{R}^2$  und

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-\infty, 0) \in \partial D$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max}} (t, y(t)) = (\infty, \infty) \in \partial D$$

2) Das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

besitzt die Lösung  $y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$ . Dabei ist  $t_{\min} = -r$ ,  $t_{\max} = r$  und

$$\lim_{t \rightarrow t_{\min}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

3) Für das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 0, \quad D = \mathbb{R}^2$$

erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \quad -\infty = t_{\min} < t < t_{\max} = 1$$

**Satz: (Picard, Lindelöf)**

Die rechte Seite  $f(t, y)$  sei stetig auf dem Quader

$$Q := \{(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : |t - t_0| \leq a \wedge \|y - y_0\|_\infty \leq b\}$$

Ferner gelte mit Konstanten  $M, L > 0$ :

$$\|f(t, y)\| \leq M \quad \forall (t, y) \in Q$$

$$\|f(t, \hat{y}) - f(t, y)\| \leq L\|\hat{y} - y\| \quad \forall (t, \hat{y}), (t, y) \in Q$$

**(Lipschitz-Bedingung)**

Dann besitzt das Anfangswertproblem  $y'(t) = f(t, y(t))$ ,  $y(t_0) = y_0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $y(t)$ , die mindestens im Intervall  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  mit

$$\varepsilon := \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$$

definiert ist.

**Beweis:** Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer **Fixpunktiteration**:

$$y^{(0)}(t) = y_0(t)$$

$$y^{(k+1)}(t) = y^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, y^{(k)}(\tau)) d\tau$$

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

**Verfahren der sukzessiven Approximation**

Beweis läuft damit analog zum Beweis des Fixpunktsatzes (Analysis II)



**Bemerkung:**

- 1) Erfüllt die rechte Seite  $f(t, y)$  auf  $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$  die Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t, \hat{y}) - f(t, y)\| \leq L \|\hat{y} - y\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit  $t_0 \in [t_1, t_2]$  eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz  $[t_1, t_2]$  erklärt ist. Man nennt dies **Globale Existenz**.

- 2) Ein lineares Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

mit stetigen Funktionen  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(n,n)}$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist.

- 3) Ist  $f(t, y)$  auf dem Quader  $Q$  eine  $C^1$ -Funktion, so erfüllt  $f(t, y)$  dort die Lipschitz-Bedingung.

**Beispiel:** (Verfahren der sukzessiven Approximation)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1$$

Dann gilt mit  $y^{(0)}(t) = 1$ :

$$y^{(1)}(t) = y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(\tau) d\tau = 1 + t$$

$\Rightarrow$  (Beweis durch Induktion)

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} t^j$$

Für  $k \rightarrow \infty$  folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)$$

## 2.2 Abhängigkeit von Parametern, Stabilität

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$$

wobei  $f(t, y)$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar sei.

Dann existiert für  $(t_0, y_0) \in D$  eine eindeutig bestimmte lokale Lösung  $y(t; t_0, y_0)$ , wobei wir die Lösung in  $D$  maximal fortsetzen.

**Frage:**

Was passiert mit dieser Lösung  $y(t; t_0, y_0)$ , wenn man den Startwert  $(t_0, y_0)$  ein wenig verschiebt?

### **Satz: (Lemma von Gronwall)**

Gilt für eine auf  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  stetige Funktion  $r(t)$  eine Abschätzung der Form:

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

so folgt für alle  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  die Beziehung:

$$r(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}$$

**Beweis:** Wir definieren für  $t \geq t_0$

$$u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von  $u(t)$  die Beziehung:

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t)$$

Aus der Voraussetzung

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^t r(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0, \beta > 0$$

erhalten wir unter Verwendung der Definition von  $u(t)$  gerade

$$e^{-\beta t} r(t) \leq e^{-\beta t} \alpha + \beta u(t)$$

und daher folgt

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\alpha e^{-\beta t} - u'(t) \geq 0$$

und integrieren von  $t_0$  bis  $t$ .

Integration von

$$u'(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

über  $[t_0, t]$  ergibt mit  $u(t_0) = 0$

$$u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t})$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} r(t) &\leq \alpha + \beta e^{-\beta t} u(t) \\ &\leq \alpha + \alpha e^{\beta t} (e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}) \\ &= \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies ergibt für  $t \geq t_0$  die gewünschte Abschätzung.

Für  $t < t_0$  folgt die Aussage des Satzes aus der Transformation durch Spiegelung, d.h.

$$\tilde{r}(t) := r(2t_0 - t)$$

**Satz:** Für Anfangswerte  $y_0, z_0 \in \mathbb{R}^n$  seien die Lösungen  $y(t; t_0, y_0)$  und  $y(t; t_0, z_0)$  auf dem Intervall  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  definiert.

Die Konstante  $L > 0$  sei eine Lipschitz-Konstante der rechten Seite  $f(t, y)$  auf einem Quader  $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$ .

Dann gilt für  $|t - t_0| \leq \varepsilon$  die Abschätzung

$$\|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|y_0 - z_0\|$$

**Beweis:** Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

$$y(t; t_0, y_0) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau; t_0, y_0)) d\tau$$

Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir damit:

$$\underbrace{\|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)\|}_{r(t)} \leq \|y_0 - z_0\| + L \cdot \int_{t_0}^t \|y(\tau; t_0, y_0) - y(\tau; t_0, z_0)\| d\tau$$

### Bemerkung:

- 1) Der Satz besagt, dass die Lösung eines Anfangswertproblem Lipschitz-stetig von den Anfangswerten  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  abhängt.
- 2) Für eine lineare DGL

$$y'(t) = Ly(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für  $t \geq t_0$  **Gleichheit:**

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0|$$

Für  $t < t_0$  wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt:

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0| \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow -\infty$ .

### Verallgemeinerung:

Sind  $f(t, y)$ ,  $g(t, y)$  stetig differenzierbar auf einem Quader mit

$$\|f(t, y - g(t, y))\| \leq \delta$$

$$\|g(t, y)\| \leq M$$

$$\|f(t, y) - f(t, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\|$$

so gilt für die beiden Lösung  $y(t)$  und  $z(t)$  der Anfangswertprobleme

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

$$z'(t) = g(t, z(t)), \quad z(t_1) = z_0$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|y(t) - z(t)\| &\leq \|y_0 - z_0\| e^{L|t-t_0|} + M|t_1 - t_0| e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{\delta}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1) \end{aligned}$$

### Eine Anwendung: **Parameterabhängige Anfangswertprobleme**

Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t), \lambda), \quad y(t_0) = y_0$$

d.h. die rechte Seite hängt von einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  ab.

Diese Problem lässt sich einfach auf den letzten Fall zurückführen:

$$y'(t) = f(t, y(t), z(t)), \quad y(t_0) = y_0$$

$$z'(t) = 0, \quad z(t_0) = \lambda$$

Setzen wir  $w(t) = (y(t), z(t))^T$ , so gilt mit

$$g(t, w(t)) = (f(t, w(t)), 0)^T$$

und  $w_0 = (y_0, \lambda)^T$ ,  $\tilde{w}_0 = (y_0, \tilde{\lambda})^T$  die Abschätzung

$$\|w(t; t_0, w_0) - w(t; t_0, \tilde{w}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot |\lambda - \tilde{\lambda}|$$

**Frage:** Kann man die beiden Größen

$$\mathbf{Y}(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\mathbf{w}(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

exakt berechnen?

**Satz:** Die rechte Seite  $f(t, \mathbf{y})$  sei eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\bar{\mathbf{y}}(t)$  sei eine auf einem kompakten Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  erklärte Lösung der Differentialgleichung  $\mathbf{y}' = f(t, \mathbf{y})$ .

1) Es gibt einen Streifen um  $\bar{\mathbf{y}}(t)$

$$S_\alpha := \left\{ (t, \mathbf{y})^T : t \in I \wedge \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(t)\| \leq \alpha \right\} \subset D, \quad \alpha > 0$$

so dass die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  des Anfangswertproblems für alle  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in S_\alpha$  auf ganz  $I$  erklärt ist.

**Satz:** (Fortsetzung)

2) Die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  ist auf  $I \times S_\alpha$  eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion bezüglich **aller** Variablen.

3) Die so genannten Variationen

$$\mathbf{Y}(t) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\mathbf{w}(t) := \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^n$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}_n$$

$$\mathbf{w}'(t) = \mathbf{f}_y(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0)$$

## Kapitel 3: Lineare Differentialgleichungen

### 3.1 Systeme erster Ordnung

Explizites lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$(1) \quad \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t)$$

wobei  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  und  $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^n$  stetige Funktionen in  $t$  sind.

Das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangswerten  $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ , die für alle  $t \in \mathbb{R}$  erklärt ist.

**Satz:** Die allgemeine Lösung der DGL (1) ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{y}_h(t)$$

wobei  $\mathbf{y}_p(t)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen,  $\mathbf{y}_h(t)$  die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist.

### Die homogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$$

$$\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

Die Lösung  $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$  ist ein Element des **Vektorraums**  $\mathbb{R}^n$ .

#### Basisdarstellung:

Sei  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  eine Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^n \alpha(t) \mathbf{v}^k$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^n \alpha(0) \mathbf{v}^k$$

**Idee:**

Betrachte die folgenden  $n$  Anfangswertprobleme ( $k = 1, \dots, n$ )

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y^k(t) &= \mathbf{A}(t)y^k(t) \\ y^k(t_0) &= \mathbf{v}^k\end{aligned}$$

Definiere die **Fundamentalmatrix** bzw. das **Fundamentalsystem**

$$\mathbf{Y}(t) := (y^1(t), \dots, y^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

**Satz:** Die Matrix  $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  sei ein (beliebiges) Fundamentalsystem. Dann gilt:

1) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^n c_k y^k(t), \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

2) Die Fundamentalmatrix ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  regulär.

**Beweis:**

Da  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  eine Basis bilden, ist die Matrix  $\mathbf{Y}(t_0)$  regulär, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (y^1(t_0), \dots, y^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n)$$

Weiter gilt für

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^n c_k y^k(t)$$

offensichtlich

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t) &= \sum_{k=1}^n c_k \frac{d}{dt}y^k(t) = \sum_{k=1}^n c_k \mathbf{A}(t)y^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t) \left( \sum_{k=1}^n c_k y^k(t) \right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)\end{aligned}$$

Also ist  $\mathbf{y}(t)$  eine Lösung.



**Beweis:** (Fortsetzung)

Sei nun  $y^*(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung. Dann setzen wir

$$c^* := Y(t_0)^{-1}y^*(t_0)$$

Dann sind  $y^*(t)$  und  $y(t) := Y(t)c^*$  beide Lösungen des Anfangswertproblems

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad y(t_0) = y^*(t_0)$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt  $y^*(t) = y(t)$ . Also gilt

$$y^*(t) = Y(t)c^*$$

Damit ist Teil 1) gezeigt.

**Beweis:** (Fortsetzung)

Teil 2) des Satzes besagt, dass  $Y(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  regulär ist:

Sei dazu  $t_1 \neq t_0$  fest. Wir zeigen dann folgende Aussage:

$$\forall y^1 \in \mathbb{R}^n \exists c \in \mathbb{R}^n : Y(t_1)c = y^1$$

denn dann ist  $Y(t_1)$  regulär.

Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t), \quad y(t_1) = y^1$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$y(t) = Y(t)c$$

mit einem geeigneten  $c \in \mathbb{R}^n$  geschrieben werden kann.

Für  $t = t_1$  gilt dann:

$$Y(t_1)c = y^1$$

## Wronski–Determinante

Die  $\mathcal{C}^1$ –Funktion

$$W(t) = \det(Y(t))$$

nennt man die Wronski–Determinante der linearen Differentialgleichung zum Fundamentalsystems  $Y(t)$ .

Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer (skalaren) linearen DGL, es gilt nämlich:

$$W'(t) = \text{Spur}(A(t)) \cdot W(t)$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{Spur}(A(\tau)) d\tau\right)$$

## Die inhomogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie im skalaren Fall die **Variation der Konstanten**:

$$y(t) = Y(t) \cdot c(t)$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} y'(t) &= Y'(t) c(t) + Y(t) c'(t) \\ &= A(t) Y(t) c(t) + Y(t) c'(t) \\ &= A(t) y(t) + Y(t) c'(t) \end{aligned}$$

Die Funktion  $y(t) = Y(t) c(t)$  löst die inhomogene Gleichung, falls:

$$Y(t) c'(t) = h(t)$$

Da  $Y(t)$  regulär ist, können wir dies auch in der Form

$$c'(t) = Y^{-1}(t) h(t)$$

schreiben. Durch Integration erhält man

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) h(\tau) d\tau$$

**Satz:** Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet:

$$y(t) = Y(t) \left( c_0 + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) h(\tau) d\tau \right)$$

Mit  $c_0 := Y(t_0)^{-1} y_0$ , gilt  $y(t_0) = y_0$ .

### Das Reduktionsverfahren:

**Annahme:** Es sei eine Lösung  $y^n(t)$  des gegebenen Systems bekannt.

**Idee:** Setze  $y^n(t)$  als letzte Spalte einer Fundamentalmatrix und reduziere damit die Dimension.

**Ansatz:** Suche neue Lösung in der Form

$$y(t) = w_n(t) y^n(t) + z(t), \quad w_n(t) \in \mathbb{R}$$

wobei wir annehmen, dass  $y^n(t) \neq 0$  gilt.

$$\begin{aligned} y'(t) &= w'_n y^n + w_n \frac{d}{dt} y^n + z' \\ &= w'_n y^n + w_n A y^n + z' \\ &= A (w_n y^n + z) - A z + w'_n y^n + z' \\ &= A y + z' - A z + w'_n y^n \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w'_n \mathbf{y}^n$$

d.h. unser Ansatz für  $\mathbf{y}(t)$  ist eine Lösung, falls  $\mathbf{z}(t)$  eine Lösung des linearen, inhomogenen Systems

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w'_n \mathbf{y}^n$$

ist.

Die komponentenweise Darstellung dieses Systems lautet

$$z'_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} z_k - w'_n y_i^n, \quad i = 1, \dots, n$$

Wir haben noch die Freiheit  $w_n(t)$  zu wählen: DGL für  $z_n(t)$  ist

$$\begin{aligned} z'_n &= a_{n1} z_1 + \dots + a_{nn} z_n - w'_n y_n^n \\ &= a_{nn} z_n - w'_n y_n^n + a_{n1} z_1 + \dots + a_{n,n-1} z_{n-1} \end{aligned}$$

Wir setzen

$$w'_n = \frac{1}{y_n^n} (a_{n1} z_1 + \dots + a_{n,n-1} z_{n-1})$$

Dann löst  $z_n(t)$  die lineare, homogene Gleichung  $z'_n = a_{nn} z_n$  und wir können die einfachste Lösung dieser Gleichung wählen, nämlich

$$z_n(t) = 0$$

Damit erhalten wir für  $z_1, \dots, z_{n-1}$  das reduzierte System:

$$\begin{aligned} z'_i &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} z_k - \left( \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk} z_k \right) \frac{y_i^n}{y_n^n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left( a_{ik} - a_{nk} \frac{y_i^n}{y_n^n} \right) z_k \\ &=: \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik} z_k \end{aligned}$$

## Reduktionsverfahren:

1) Man setze:

$$b_{ik} := a_{ik} - a_{nk} \frac{y_i^n}{y_n^n}, \quad i, k = 1, \dots, n-1$$

2) Man bestimme die (allgemeine) Lösung des Systems

$$z'(t) = \mathbf{B}(t) \cdot z(t), \quad z(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

3) Zu jeder Lösung  $z(t) \neq 0$  ist dann

$$y(t) := w_n(t)y^n(t) + \begin{pmatrix} z(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$w_n(t) := \int_{t_0}^t \left( \frac{1}{y_n^n(\tau)} \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(\tau) z_k(\tau) \right) d\tau$$

eine von  $y^n(t)$  linear unabhängige Lösung.

**Beispiel:** Der Vektor  $y^2(t) = (t, 1)^T$  ist eine Lösung von

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Reduktionsverfahrens:

$$b_{11} = a_{11} - a_{21} \frac{y_1}{y_2} = 0 - (-1) \frac{t}{1} = t$$

Daraus folgt die Gleichung  $z' = tz$  mit der Lösung  $z(t) = e^{t^2/2} \Rightarrow$

$$w(t) = \int_{t_0}^t a_{21} \frac{z}{y_2} d\tau = - \int_{t_0}^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

$$y^1(t) = w(t) \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem:  $\mathbf{Y}(t) = (y^1(t), y^2(t))$ .

### 3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$A(t) = A = \text{konst.}$$

gilt, d.h. die Matrix ist unabhängig von  $t$  (**Konstante Koeffizienten**).

**Ansatz:** Suche eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{y}$$

Dies bedeutet:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

d.h.  $\mathbf{y}(t)$  ist eine Lösung, falls

$\mathbf{v}$  ein **Eigenvektor** von  $\mathbf{A}$  zum **Eigenwert**  $\lambda$  ist.

**Wiederholung:** Fundamentalsystem  $\mathbf{Y}(t)$  von

$$\mathbf{y}'(t) = A(t) \mathbf{y}(t)$$

ist gegeben durch die  $n$  Anfangswertaufgaben

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) = A(t) \mathbf{y}^k(t)$$

$$\mathbf{y}^k(t_0) = \mathbf{v}^k$$

mit den Basisvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$  und

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

**Konstante Koeffizienten:** Eigenvektor  $\mathbf{v}$  zum Eigenwert  $\lambda$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$$

besitzt die Lösung

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

**Fall 1:** Alle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  von  $A$  sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ .

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$Y(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

**Beispiel:** (Vorbereitung auf Fall 2)

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel:** (Fortsetzung: Vorbereitung auf Fall 2)

Die Eigenwerte und –vektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, & \mathbf{v}^1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, & \mathbf{v}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber für  $\mathbb{C}^2$ , d.h. die Eigenvektoren (und Eigenwerte) sind komplexwertig.

Wir suchen aber **reellwertige** Lösungen!

Die komplexen Eigenvektoren bilden ein **komplexes** Fundamentalsystem:

$$Y(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2)$$

**Fall 2:** Die Systemmatrix  $A$  ist **diagonalisierbar**

Dann existiert eine Basis des  $\mathbb{C}^n$  aus (komplexen) Eigenvektoren  $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^n$ . Die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem (für  $\mathbb{C}^n$ ) ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, \dots, e^{\lambda_n t} \mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine, **komplexwertige** Lösung des homogenen Systems mit konstanten **reellen** Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t} \mathbf{v}^k, \quad c_k \in \mathbb{C}$$

**Bemerkung:** Jede **normale** und damit jede **symmetrische** Matrix ist diagonalisierbar (Lineare Algebra).

Normale Matrix bedeutet, dass  $\bar{A}^T A = A \bar{A}^T$  gilt.

**Frage:** Ist es möglich, ein reelles Fundamentalsystem anzugeben?

**Lineare Algebra:**

Ist  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein komplexer Eigenwert von  $A$ , so ist auch  $\bar{\lambda}$  (konjugiert-komplex) ein Eigenwert.

Dementsprechend ist  $\bar{\mathbf{v}}$  ein Eigenvektor, falls  $\mathbf{v}$  ein Eigenvektor ist.

**Also:** Nichtreelle Eigenwerte und -vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= e^{\lambda t} \mathbf{v} \\ \mathbf{y}^2(t) &= e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \operatorname{Re} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \operatorname{Im} (e^{\lambda t} \mathbf{v}) = \frac{1}{2i} (e^{\lambda t} \mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t} \bar{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$



**Beispiel:** Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}^2)$$

mit

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \quad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \quad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\mathbf{y}^1(t) = \operatorname{Re}(\mathbf{z}^1(t))$$

$$\mathbf{y}^2(t) = \operatorname{Im}(\mathbf{z}^1(t))$$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2 \sin(2t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine, **reelle** Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ 2c_1 \sin(2t) - 2c_2 \cos(2t) \end{pmatrix}$$

**Fall 3:** Die Systemmatrix  $A$  ist **nicht** diagonalisierbar

Hier benötigt man die **Jordansche Normalform** einer Matrix:

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

wobei  $\mathbf{J}_i$  ein Jordan-Kästchen bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit dem Eigenwert  $\lambda_i$ .

**Wieso** ist im Fall 3 die Jordansche Normalform wichtig?

Ein System der Form

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

kann explizit gelöst werden.

Ein Fundamentalsystem für (2) ist gegeben durch

$$e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses System entsteht mit den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n$ .

## Jordansche Normalform

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S}$$

Transformationsmatrix  $\mathbf{S}$  besteht aus Eigen- und Hauptvektoren

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}^{11}, \dots, \mathbf{v}^{1r_1} \mid \mathbf{v}^{21}, \dots, \mathbf{v}^{2r_2} \mid \dots \mid \mathbf{v}^{m1}, \dots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

$\mathbf{v}^{j1}$  : Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, m$

$\mathbf{v}^{jk}$  : Hauptvektor der Stufe  $(k - 1)$ ,  $k = 2, \dots, r_j$

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n) \mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1}, k = 2, \dots, r_j$$

Wir setzen nun  $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}(t)$ . Dann gilt

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{z}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J} \mathbf{z}(t)$$

Ein Fundamentalsystem für  $\mathbf{z}' = \mathbf{J} \mathbf{z}$  haben wir bereits berechnet.

**Rücktransformation** ergibt ein Fundamentalsystem für  $\mathbf{y}' = \mathbf{A} \mathbf{y}$ .

Für ein einzelnes Jordan-Kästchen ergibt sich:

$$\mathbf{y}^{11}(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}^{11}$$

$$\mathbf{y}^{12}(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t}{1!} \mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12} \right)$$

⋮

$$\mathbf{y}^{1r}(t) = e^{\lambda_1 t} \left( \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \mathbf{v}^{11} + \dots + \frac{t}{1!} \mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r} \right)$$

**Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:**

- 1) Bestimmung der Eigenwerte, Eigen- und Hauptvektoren,
- 2) Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
- 3) Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.

**Beispiel:** Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von  $A$  lautet:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1 - \lambda)^3$$

Der Wert  $\lambda = 1$  ist also ein dreifacher Eigenwert.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da  $\text{rang}(A - \lambda I_3) = 2$  gilt, ist die geometrische Vielfachheit  $g(\lambda) = 1$ .

Hauptvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t + 1 \\ 8t + 2 \end{pmatrix}$$

**Beispiel:** Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist  $\lambda = 1$  dreifacher Eigenwert von  $\mathbf{A}$ , aber es gilt  $g(\lambda) = 2$ .

Es existieren also **zwei** linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)^2 = \mathbf{0}$$

Wir suchen daher einen zu  $\mathbf{v}^1$  und  $\mathbf{v}^2$  linear unabhängigen Vektor  $\mathbf{v}^{22}$  (Hauptvektor der Stufe 1).

Wähle etwa  $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^T$ . Dann gilt

$$\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgende System von Eigen- und Hauptvektoren:

$$\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zugehöriges Fundamentalsystem:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Transformationsmatrizen:

Es gilt:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jordansche Normalform ist:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$J = S^{-1}AS$$

### 3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine skalare, lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung:

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei  $a_k(t)$ ,  $k = 0, \dots, n - 1$  stetige Funktionen auf  $\mathbb{R}$  seien.

Gleichungen dieser Bauart lassen sich stets als lineare Differentialgleichungssysteme

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

schreiben.

## Die homogene Differentialgleichung

**Definition** Ein Funktionensystem  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$  heißt ein **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung  $L[y] = h$ , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- 1) Die Funktion  $y_k(t)$  löst die homogene Gleichung, d.h.

$$L[y_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

- 2) Für die **Wronski-Determinante**

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

gilt:  $W(t_0) \neq 0$  für mindestens ein  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

## Bemerkung:

- 1) Ist  $W(t_0) \neq 0$ , so gilt auch für alle  $t \in \mathbb{R}$ :  $W(t) \neq 0$
- 2) Die Funktion  $W(t)$  genügt der Differentialgleichung

$$W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$$

und daher folgt direkt

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp \left( - \int_{t_0}^t a_{n-1}(\tau) d\tau \right)$$

Sei  $C(t)$  die zugehörige Koeffizientenmatrix wie in (3). Dann gilt

$$\det C(t) = \sum_{i=1}^n c_{ii}(t) = -a_{n-1}(t)$$

**Bemerkung:** (Fortsetzung)

- 3) Ein Fundamentalsystem  $(y_1, \dots, y_n)$  lässt sich durch Lösung der folgenden  $n$  Anfangswertaufgaben ( $k = 1, \dots, n$ ) bestimmen:

$$L[y_k] = 0$$
$$y_k^{(i)}(t) = \begin{cases} 0 & : i \neq k-1 \\ 1 & : i = k-1 \end{cases} \quad (i = 0, \dots, n-1)$$

- 4) Ist  $(y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem, so lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^n c_k y_k(t)$$

wobei  $y_p(t)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

## Das Reduktionsverfahren

Sei  $u(t) \neq 0$  eine Lösung der homogenen Gleichung  $L[y] = 0$ .

### Produktansatz:

Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung in der Form

$$y(t) = u(t) \cdot z(t)$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$y'(t) = u'(t)z(t) + u(t)z'(t)$$
$$y''(t) = u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t)$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t)$$



Einsetzen in  $L[y] = 0$  ergibt:

$$\begin{aligned} L[y] &= \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\ &= \underbrace{\left[ \sum_{k=0}^n a_k \binom{k}{0} u^{(k)}(t) \right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t) z^{(j)}(t) \\ &= \sum_{j=1}^n b_j z^{(j)}(t) \end{aligned}$$

Setzt man  $w(t) := z'(t)$ , so folgt

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j w^{(j)}(t) = 0$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung der Ordnung  $n - 1$ .

Ist  $w_1, \dots, w_{n-1}$  ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j w^{(j)}(t) = 0$$

so setzen wir

$$z_k(t) = \int_{t_0}^t w_k(\tau) d\tau, \quad k = 1, \dots, n - 1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, z_1 \cdot u, \dots, z_{n-1} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem das Ausgangsgleichung, also  $L[y] = 0$  mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = 0$$

**Beispiel:**

Die Differentialgleichung  $y'' + ty' + y = 0$  besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Unser Ansatz  $y = u \cdot z$  liefert:

$$y' = u' \cdot z + u \cdot z'$$

$$y'' = u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z''$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} y'' + ty' + y &= u''z + 2u'z' + uz'' + t(u'z + uz') + uz \\ &= 2u'z' + uz'' + tuz' \end{aligned}$$

Wir setzen  $w = z'$  und erhalten für  $w$  die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u} w$$

Wir berechnen:

$$\frac{2u' + tu}{u} = \frac{-2te^{-t^2/2} + te^{-t^2/2}}{e^{-t^2/2}} \quad \Rightarrow \quad w' = tw$$

Damit gilt:

$$w(t) = e^{t^2/2} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Wir erhalten damit das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = u(t) = e^{-t^2/2} \quad y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

## Die inhomogene Differentialgleichung

Ist das Funktionensystem  $(y_1, \dots, y_n)$  ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung.

**Die Methode der Variation der Konstanten** ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \dots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_{n-1} \\ c'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

## Die Methode der Greenschen Funktion/Grundlösungsverfahren

Gegeben sei die inhomogene Gleichung  $n$ -ter Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = h(t)$$

**Satz:**

Sei  $w(t)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : k = 0, \dots, n-2 \\ 1 & : k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung  $y_p(t)$  der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$y_p(t) = \int_{t_0}^t G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$
$$G(t, \tau) = w(t - \tau + t_0)$$

## Lineare Gleichungen $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die homogene Gleichung  $L[y] = 0$  mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n-1$  und  $a_n = 1$ .

**Ansatz** zur Berechnung eines Fundamentalsystems:

$$(4) \quad y(t) = e^{\lambda t}$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left( \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

Der Ansatz (4) liefert also eine Lösung, falls  $\lambda$  eine Nullstelle der so genannten **charakteristischen Gleichung**

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k = 0$$

ist.

### Satz:

- 1) Ist  $\lambda_k$  eine  $r_k$ -fache **reelle** Nullstelle von  $p(\lambda)$ , so existieren die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\ y_{k2}(t) &= t \cdot e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ y_{k,r_k}(t) &= t^{r_k-1} \cdot e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

- 2) Ist  $\lambda_k$  eine  $r_k$ -fache **komplexe** Nullstelle,  $\lambda_k \notin \mathbb{R}$ , so sind die reellen Lösungen mit  $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$  gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \quad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und  $j = 1, \dots, r_k$ .

- 3) Die nach 1) und 2) gebildeten Lösungen bilden ein Fundamentalsystem von  $L[y] = 0$ .

**Beispiel:**

1) Gegeben sei die homogene Gleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

und besitzt die Nullstellen  $\lambda_{1,2} = i$ ,  $\lambda_{3,4} = -i$ .

Ein Fundamentalsystem ist daher

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t & y_3(t) &= t \cdot \cos t \\ y_2(t) &= \sin t & y_4(t) &= t \cdot \sin t \end{aligned}$$

2) Die homogene Gleichung  $y'' - 2y' + y = 0$  besitzt die charakteristische Gleichung  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  mit der doppelten Nullstelle  $\lambda = 1$ .

Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

**Beispiel:** Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

Variation der Konstanten verwendet den Ansatz:

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

Gelöst werden muss dann das DGL-System

$$c_1' e^t + c_2' t e^t = 0$$

$$c_1' e^t + c_2' (1+t)e^t = \frac{e^t}{t^2}$$

Man berechnet direkt:

$$c_1(t) = -\ln |t| \quad c_2 = -\frac{1}{t}$$

und eine spezielle Lösung ist daher

$$y_p(t) = -(\ln |t| + 1)e^t$$

**Beispiel:** Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

und verwenden die Methode der Greenschen Funktion:

Die Lösung von

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch  $w(t) = (t-1)e^{t-1}$ . Also gilt für die Greensche Funktion

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t (t - \tau)e^{t-\tau} \frac{e^\tau}{\tau^2} d\tau \\ &= e^t(-1 + t - \ln |t|) \end{aligned}$$

## Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von  $y_p(t)$  verwenden:

1) Ist  $\mu$  keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung  $p(\lambda)$ :

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j$$

mit den freien Parametern  $\gamma_j$

2) Ist  $\mu$  eine  $r$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$ :

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^m \gamma_j t^j$$

**Beispiel:** Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - y = te^t$$

Die charakteristische Gleichung ist  $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$  und  $\mu = 1$  ist eine **einfache** Nullstelle.

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren:

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt  $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$  und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t - 1)e^t$$

## Das Superpositionsprinzip

Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

$$(5) \quad L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Sind  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  spezielle Lösungen von  $L[y] = h_1(t)$  und  $L[y] = h_2(t)$ , so ist  $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$  eine spezielle Lösung von (5).

## Komplexe Differentialgleichungen

Ist  $h(t)$  der Real- oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion  $w(t)$ ,

$$h(t) = \operatorname{Re}(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \operatorname{Im}(w(t))$$

und ist  $z(t)$  eine (komplexe) Lösung von  $L[z] = w$ , so ist

$$y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \operatorname{Im}(z(t))$$

eine (reelle) Lösung von der DGL  $L[y] = h(t)$ .

### Beispiel:

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos t + \sin(2t))$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t} \left( \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{4} t \cos(2t) \right)$$

1) Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cos t$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \sin(2t)$$

2) Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+i)t}$$

$$z'' + 2z' + 5z = e^{(-1+2i)t}$$

### 3.4 Die Laplace–Transformation

Sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine reell– oder komplexwertige Funktion auf  $\mathbb{R}$ . Unter der **Laplace–Transformierten** von  $F$  versteht man die Integraltransformation

$$(6) \quad f(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

wobei  $s \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl ist.

**Frage:** Für welche Funktionen  $F(t)$  existiert das uneigentliche Integral?  
Schreiben wir die komplexe Zahl  $s$  als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) F(t) dt$$



**Wachstumsverhalten** von  $F(t)$  ist entscheidend:

**Satz:** Ist  $F$  auf  $[0, \infty)$  lokal integrierbar und erfüllt  $F$  eine Ungleichung der Form

$$|F(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \quad \forall t \geq 0$$

mit gewissen Konstanten  $M$  und  $\sigma_0$ , so existiert die Laplace-Transformierte für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit

$$\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$$

**Beweisidee:** Setzen wir  $s = \sigma + i\omega$ , so gilt

$$|e^{-st} F(t)| = e^{-\sigma t} |F(t)| \leq M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}$$

Aus  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ , folgt also

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \quad \forall t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals auf der rechten Seite von (6).

### Notationen und Bezeichnungen:

Sei  $F(t)$  eine reell- oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace-Transformierte  $f(s)$  existiert.

1) Wir schreiben auch:  $f = \mathcal{L}[F]$

2) Das **Doetsch-Symbol** lautet  $\circ \text{---} \bullet$ :

$$F \circ \text{---} \bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet \text{---} \circ F$$

3) Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ \text{---} \bullet f$$

nennt man eine **Korrespondenz**, die Zuordnung  $F \rightarrow f$  heisst **Laplace-Transformation**.

4) Die Laplace-Transformation ist **linear**, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G]$$

## Beispiele:

1) Wir betrachten die **Heaviside-Funktion**

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace-Transformierte lautet demnach

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

und existiert für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

Dies liefert die Korrespondenz

$$1 \circ \text{---} \bullet \frac{1}{s}$$

## Beispiele: (Fortsetzung)

2) Die Laplace-Transformierte von  $F(t) = t^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt$$

Das Integral existiert für  $\operatorname{Re}(s) > 0$  und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^n dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{n-1} dt$$

Wiederholte Anwendung ergibt die Korrespondenz

$$t^n \circ \text{---} \bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**Beispiele:** (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die komplexe Funktion  $F(t) = e^{at}$  mit  $a = \alpha + i\beta$ :

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a} e^{-(s-a)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > \alpha \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Korrespondenz

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

**Beispiele:** (Fortsetzung)

4) Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t})$$

Wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

**Beispiele:** (Fortsetzung)

5) Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$$

Wegen

$$e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\cos(\omega_0 t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

**Korrespondenztabelle:**

$F(t)$	$f(s)$	$\sigma_0$	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \dots$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$\operatorname{Re}(a)$	$a$ komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	0	$\omega_0$ reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	0	$\omega_0$ reell

## Grundregeln der Laplace-Transformation

### 1) Additionssatz

Für beliebige komplexe Konstanten  $a$  und  $b$  gilt:

$$aF(t) + bG(t) \circ \bullet af(s) + bg(s)$$

### 2) Ähnlichkeitssatz

Für jede reelle Konstante  $\alpha > 0$  gilt:

$$F(\alpha t) \circ \bullet \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

**Beispiel:** Aus

$$e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ \bullet \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} - 1} = \frac{1}{s - \alpha}$$

## Grundregeln der Laplace-Transformation

### 3) Differentiationssatz

$F$  sei für  $t > 0$  differenzierbar und es existiere die Laplace-Transformierte von  $F'$ . Dann gilt

$$F'(t) \circ \bullet sf(s) - F(0)$$

Besitzt  $F$  im Ursprung eine Unstetigkeitsstelle, so bedeutet  $F(0)$  den linksseitigen Grenzwert

$$F(0) := \lim_{t \searrow 0} F(t)$$

**Allgemein** gilt für höhere Ableitungen ( $n \geq 2$ ) die Formel:

$$F^{(n)}(t) \circ \bullet s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$$

## Grundregeln der Laplace-Transformation

### 4) Multiplikationssatz

Es gilt

$$-tF(t) \circ \bullet f'(s)$$

beziehungsweise

$$tF(t) \circ \bullet -f'(s)$$

### Allgemeine Formel:

$$(-t)^n F(t) \circ \bullet f^{(n)}(s)$$

beziehungsweise

$$t^n F(t) \circ \bullet (-1)^n f^{(n)}(s)$$

## Grundregeln der Laplace-Transformation

### 5) Integrationsatz

Es gilt:

$$\int_0^t F(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{f(s)}{s}$$

### 6) Divisionsatz

Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten  $\sigma_0$ , und es existiere die Laplace-Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}$$

Dann gilt für  $\operatorname{Re}(s) > \sigma_0$ :

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty f(u) du$$

## Grundregeln der Laplace–Transformation

### 7) Verschiebungssatz

Für alle  $T_0 > 0$  gilt:

$$F(t - T_0) \circ \longrightarrow \bullet e^{-sT_0} f(s)$$

### 8) Dämpfungssatz

Für ein beliebiges komplexes  $a$  gilt:

$$e^{at} F(t) \circ \longrightarrow \bullet f(s - a)$$

### Beispiel:

Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$$

## Laplace–Transformation und gewöhnliche Differentialgleichungen

Nach dem Differentiationssatz gilt:

$$F'(t) \circ \longrightarrow \bullet s f(s) - F(0)$$

**Idee:** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(7) \quad Y'(t) = Y(t), \quad Y(0) = 1$$

Sei  $y(s)$  die Laplace–Transformierte von  $Y(t)$ . Dann folgt aus (7):

$$s y(s) - 1 = y(s) \quad \Rightarrow \quad y(s) = \frac{1}{s - 1}$$

Aus der Korrespondenztabelle ergibt sich daher:

$$Y(t) = e^t$$

**Resultat:** Lineare DGL's ergeben **algebraische Gleichungen** für die Laplace–Transformierte.

**Beispiel:** Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems ( $\alpha > 0$ )

$$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t)$$

mit  $Y(0) = Y'(0) = 0$ .

Nach der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

und es gilt:

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$$

Mögliches weiteres Vorgehen: Partialbruchzerlegung.

Hier verwenden wir

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Mit dem Multiplikationssatz

$$tF(t) \circ \bullet - f'(s)$$

folgt:

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ t \sin(\alpha t)$$

und mit dem Integrationssatz:

$$-\frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \bullet \circ \int_0^t \tau \sin(\alpha \tau) d\tau = \frac{1}{\alpha^2} (-\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t))$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{2}{\alpha^2} (-\alpha t \cos(\alpha t) + \sin(\alpha t))$$



**Beispiel:** Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$Y'' + Y' + 4Z = \sin(\omega t)$$

$$Y' + Z' + Z = 0$$

mit den Anfangsbedingungen  $Y(0) = -\frac{1}{3}$ ,  $Y'(0) = 0$  und  $Z(0) = 0$

Anwendung der Laplace-Transformation ergibt

$$s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) = 0$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$s(s+1)y(s) + 4z(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{s+1}{3}$$

$$sy(s) + (s+1)z(s) = -\frac{1}{3}$$

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Dies ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung  $(y(s), z(s))^T$  erhalten wir

$$y(s) = \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2 + \omega^2)}{3(s^2 + \omega^2)s[(s+1)^2 - 4]}$$

$$z(s) = \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)[(s+1)^2 - 4]}$$

Die nächsten Schritte:

1) **Partialbruchzerlegung**

2) Rücktransformation aus der **Korrespondenztabelle**

### Beispiel: (Fortsetzung)

Als Lösung erhalten wir:

$$y(s) = -\frac{\omega^2 - 3}{\omega(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) - \frac{\omega^2 + 5}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ + \frac{\omega}{2(\omega^2 + 1)} e^t - \frac{\omega}{6(\omega^2 + 9)} e^{-3t} - \frac{\omega + 1}{3\omega}$$

$$z(s) = \frac{2\omega}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \cos(\omega t) + \frac{\omega^2 + 3}{(\omega^2 + 9)(\omega^2 + 1)} \sin(\omega t) \\ - \frac{\omega}{4(\omega^2 + 1)} e^t + \frac{\omega}{4(\omega^2 + 9)} e^{-3t}$$

**Komplizierte** Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

## 3.5 Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite  $f(t, y)$ .

Weiter sei  $y^*(t)$  eine spezielle Lösung.

**Frage:** Wie verhalten sich **benachbarte** Lösungen  $y(t; t_0, y_0)$ ?

**Beispiel:** Wir betrachten die beiden Anfangswertprobleme

$$y'(t) = \pm y(t)$$

$$y(0) = 0$$

In beiden Fällen ist die Lösung  $y^*(t) = 0$ .

Lösungen  $y(t; 0, y_0)$  mit der Anfangsbedingung  $y_0 \neq 0$  sind:

$$y(t) = y_0 e^t \rightarrow \pm\infty \quad y(t) = y_0 e^{-t} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow \infty$$

**Definition:**

- 1) Die Lösung  $y^*(t)$  heißt **stabil** auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , falls es zu  $t_0 \in I$  und  $\varepsilon > 0$  stets ein  $\delta > 0$  gibt, so dass

$$\forall y_0 : \|y_0 - y^*(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|y(t; t_0, y_0) - y^*(t)\| < \varepsilon \quad (\forall t \in I)$$

Kann man  $\delta$  unabhängig von  $t_0$  wählen, so heißt  $y^*(t)$  **gleichmäßig stabil** auf  $I$ .

- 2) Ist die Lösung  $y^*(t)$  auf einem Intervall  $[a, \infty)$  erklärt, so heißt  $y^*(t)$  dort **asymptotisch stabil**, falls  $y^*(t)$  dort stabil ist und es zu  $t_0 \geq a$  ein  $\delta(t_0) > 0$  gibt mit der Eigenschaft

$$\forall y_0 : \|y_0 - y^*(t_0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t; t_0, y_0) - y^*(t_0)\| = 0$$

Die Lösung  $y^*(t)$  heißt **strikt stabil**, falls  $y^*(t)$  gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

**Bemerkung:**

Sei  $y^*(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Setzen wir

$$z(t) := y(t) - y^*(t)$$

so erfüllt  $z(t)$  die Differentialgleichung

$$z'(t) = f(t, z(t) + y^*(t)) - f(t, y^*(t)) =: f^*(t, z(t))$$

Gleichzeitig ist  $z^*(t) = 0$  eine Lösung von

$$(8) \quad z'(t) = f^*(t, z(t))$$

Statt der Stabilität von  $y^*(t)$  können wir also auch die Stabilität der Nulllösung von (8) untersuchen.

## Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \quad a \leq t < \infty$$

mit stetiger Matrix  $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  bezeichne  $\mathbf{Y}(t)$  ein beliebiges Fundamentalsystem.

### Satz: (Stabilitätssatz I)

- 1) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann stabil auf dem Intervall  $[a, \infty)$ , falls das Fundamentalsystem  $\mathbf{Y}(t)$  auf  $I$  beschränkt ist.
- 2) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann gleichmäßig stabil auf  $I$ , falls es eine Konstante  $M > 0$  gibt mit

$$\forall t \geq t_0 \geq a \quad : \quad \|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \leq M$$

- 3) Die Nulllösung  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

**Satz:** Sei  $\lambda(t)$  der größte Eigenwert der Matrix  $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$ . Gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty$$

so folgt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0$  für jede Lösung  $\mathbf{y}(t)$ , d.h.  $\mathbf{y}^*(t) = 0$  ist asymptotisch stabil.

**Beweis:** Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt} (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T \mathbf{y} + \mathbf{y}^T (\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) \mathbf{y} \\ &\leq \lambda(t) (\mathbf{y}^T \mathbf{y}) = \lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp \left( \int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau \right)$$

**Satz: (Stabilitätssatz II)**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem  $y' = Ay$ ,  $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$  konstante Matrix. Die Nulllösung  $y^* = 0$  ist genau dann

- 1) **strikt stabil**, falls für alle Eigenwerte von  $A$  gilt:  $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ .
- 2) **gleichmäßig stabil**, falls für alle Eigenwerte von  $A$  gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

- 3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung  $y^*(t) = 0$  instabil.

**Beispiel:** Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil.

Eigenwerte sind  $\lambda_1 = -4$  und  $\lambda_2 = 0$ , aber  $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$ .

**Beispiel:** Wir betrachten das DGL-System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = Ay + b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher  $y^* = (3, -2)^T$ .

Die Transformation  $z := y - y^*$  liefert das homogene Differentialgleichungssystem

$$z' = Az$$

und die Eigenwerte von  $A$  sind

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Damit ist  $y^*$  strikt stabil.

**Satz: (Kriterium von Routh und Hurwitz)**

Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_n > 0$$

Dann sind äquivalent:

- 1) Alle Nullstellen von  $p(z)$  haben negativen Realteil.
- 2) Es gilt  $a_k > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Ferner sind alle Hauptunterdeterminanten der folgenden  $(n, n)$ -Matrix positiv:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \dots & \dots & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Dabei sei  $a_k := 0$  für alle  $k > n$ .

**Beispiel:** Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die  $(3, 3)$ -Matrix  $\mathbf{H}$  auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminanten sind  $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$  sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von  $p(z)$  einen negativen Realteil.

## Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$y'(t) = f(y(t))$$

wobei  $f(0) = 0$  gilt, d.h.  $y^* = 0$  ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels **Linearisierung** der rechten Seite:

$$\begin{aligned}y'(t) &= Ay(t) + g(y(t)) \\ A &= Jf(0), \quad g(0) = 0 \\ g(y) &= o(\|y\|)\end{aligned}$$

Die Beziehung

$$f(y) = f(0) + Jf(0)y + g(y)$$

ist gerade die **Taylor-Entwicklung** um den Entwicklungspunkt  $y^* = 0$ .

### Satz: (Stabilitätssatz III)

Unter den obigen Voraussetzungen gelten:

- 1) Ist für alle Eigenwerte  $\lambda_j$  von  $A = Jf(0)$ :

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist  $y^* = 0$  ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von  $y' = f(y)$ , d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

- 2) Existiert ein Eigenwert  $\lambda_j$  von  $A$  mit:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt  $y^* = 0$  instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls auf das nichtlineare Problem.

**Bemerkung:**

Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

1) für alle Eigenwerte  $\lambda_j$  von  $A$  gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0,$$

2) **und** für mindestens ein Eigenwert  $\lambda_j$  gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0,$$

**Beispiel:**

Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die nichtlineare DGL

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi$$

Dabei ist

Dabei ist

- $\Phi = \Phi(t)$  der Auslenkungswinkel zur Zeit  $t$ ,
- $l$  die Länge des Pendels,
- und  $g$  die Gravitationskonstante.

Mittels der Substitution

$$y_1 := \Phi \quad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das DGL-System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite, also

$$y_{1k} = k\pi, \quad y_{2k} = 0, \quad k \in \mathbb{Z}$$



Die **nichtlineare** rechte Seite des Systems ist:

$$f(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix}$$

Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt  $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0)$ :

$$\begin{aligned} f(y_1, y_2) &= \underbrace{f(y_{1k}, y_{2k})}_{=0} + \mathbf{J} f(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(\|y - y^k\|) \\ &= \mathbf{J} f(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(\|y - y^k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(\|y - y^k\|) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(\|y - y^k\|) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das linearisierte System:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 (-1)^k (y_1 - k\pi) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2 (-1)^k$$

Für die Eigenwerte folgt daraus:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \text{ falls } k \text{ gerade} \\ \pm \omega & : \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

**Phasenportrait** auf dem Einband von Ansorge, Oberle, Band 2!

## Stabilität nichtlinearer Systeme mittels Ljapunov-Funktion

### Definition:

Eine  $C^1$ -Funktion  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , heißt eine **Ljapunov-Funktion** auf  $\bar{K}_r(0) \subset D$  für  $f(y)$ , falls gilt:

1)

$$V(0) = 0, \quad V(y) > 0 \quad \text{für } y \neq 0$$

2)

$$\langle \nabla V, f(y) \rangle \leq 0 \quad (\forall y, \|y\| \leq r)$$

Gilt in 2) sogar

2')

$$\langle \nabla V, f(y) \rangle < 0 \quad (\forall y, 0 < \|y\| \leq r)$$

so heißt  $V(y)$  eine **strenge Ljapunov-Funktion**.

### Satz: (Stabilitätssatz IV)

- 1) Ist  $V(y)$  eine Ljapunov-Funktion von  $f(y)$ , so ist  $y^* = 0$  ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.
- 2) Ist  $V(y)$  eine strenge Ljapunov-Funktion von  $f(y)$ , so ist  $y^* = 0$  ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

### Beweisidee:

Man betrachtet die Zeitableitung der Funktion  $V(y(t))$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(y(t)) &= \text{grad } V(y(t)) \cdot y'(t) \\ &= \text{grad } V(y(t)) \cdot f(y(t)) \\ &= \langle \nabla V, f(y) \rangle \end{aligned}$$

Ist  $V$  eine (strenge) Ljapunov-Funktion, so ist  $V(y(t))$  (streng) monoton fallend.

**Bemerkung:** Gilt für eine  $C^1$ -Funktion  $V(y)$  sowohl

$$V(0) = 0, \quad V(y) > 0 \quad \text{für } y \neq 0$$

als auch

$$\langle \nabla V, f(y) \rangle > 0 \quad (\forall y, 0 < \|y\| \leq r)$$

so ist  $y^* = 0$  ein **instabiler** Gleichgewichtspunkt.

**Beispiel:** Wir betrachten das nichtlineare System

$$\dot{x} = -x^3 + y$$

$$\dot{y} = -x - y^5$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Wir machen den Ansatz

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \quad a, b > 0$$

**Beispiel:** (Fortsetzung)

Offensichtlich gilt:

$$V(0, 0) = 0, \quad V(x, y) > 0 \quad \text{für } (x, y) \neq (0, 0)$$

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x, y), f(x, y) \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\ &= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6 \end{aligned}$$

Setzt man  $a = b > 0$ , so folgt

$$V(x, y) = -2ax^4 - 2by^6$$

d.h.  $V$  ist eine **strenge Ljapunov-Funktion** und der Nullpunkt ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

**Beispiel:** Beim mathematischen Pendel

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1\end{aligned}$$

setzt man

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2}y_2^2 + \omega^2(1 - \cos y_1)$$

Damit gilt  $V(0, 0) = 0$  und  $V(y_1, y_2) > 0$  für  $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$ ,  $r < \pi$ .

Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Also ist  $V$  ein Ljapunov-Funktion auf  $\bar{K}_r(\mathbf{0})$  und der Nullpunkt ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Allerdings ist  $V$  **keine** strenge Ljapunov-Funktion, denn der Ursprung ist auch **nicht** asymptotisch stabil.

## Kapitel 4: Randwertaufgaben

### 4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

Dabei sei  $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  hinreichend oft stetig differenzierbar.

**Anfangswertproblem:** Gebe Lösung zur Zeit  $t = a$  vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

**Randwertproblem:**

Zur Festlegung einer Lösung  $\mathbf{y}(t)$  werden nicht alle Komponenten  $y_i$  an **einer** Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten  $y_i$  an verschiedenen Stellen  $t = a, b, c, \dots$

## Beispiele:

### 1) Sturmsche Randwertaufgaben

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0y(t) = h(t)$$

$$\alpha_1y(a) + \alpha_2y'(a) = d_1$$

$$\beta_1y(b) + \beta_2y'(b) = d_2$$

### 2) Lineare Randwertaufgaben

$$y'(t) = \mathbf{A}(t)y(t) + \mathbf{h}(t)$$

$$\mathbf{B}_ay(a) + \mathbf{B}_by(b) = \mathbf{d}$$

### 3) Allgemeine Zweipunkt-Randwertaufgaben

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$r(y(a), y(b)) = 0$$

Randwerte bestimmen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung:

**Beispiel:** Wir betrachten die (lineare) DGL zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0$$

#### 1) Die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung  $y(t) = \sin t$ .

#### 2) **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 1$$

#### 3) Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \quad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen  $y(t) = c \sin t$ ,  $c \in \mathbb{R}$  beliebig.

Bei Randwertproblemen gilt der folgende Existenzsatz:

**Satz:** Gegeben sei eine lineare Randwertaufgabe mit stetigen Funktionen  $A(t), h(t), t \in \mathbb{R}$ . Weiter sei  $Y(t)$  ein Fundamentalsystem zu  $y' = Ay$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1) Die lineare Randwertaufgabe ist für **alle** stetigen Inhomogenitäten  $h(t)$  und  $d$  stets eindeutig lösbar.

2) Die zugehörige Randwertaufgabe

$$y' = Ay, \quad B_a y(a) + B_b y(b) = 0$$

hat nur die triviale Lösung  $y(t) = 0$ .

3) Die Matrix

$$E := B_a Y(a) + B_b Y(b) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

ist regulär.

**Beispiel:** Wir betrachten die Differentialgleichung  $y'' + y = 0$  aus dem letzten Beispiel.

Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} E &= B_a Y(0) + B_b Y(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix  $E$  ist demnach regulär für  $b = \pi/2$  und singulär für  $b = \pi$ .

Viele andere Probleme lassen sich auf Randwertaufgaben zurückführen.

**Beispiel:** Gegeben sei ein **Randwertproblem mit freier Endzeit:**

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)) & 0 \leq t \leq T \\r(y(0), y(T)) &= 0\end{aligned}$$

wobei  $T$  zu bestimmen ist und  $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  gerade  $(n + 1)$  Randbedingungen definiert.

Wir setzen nun  $t = \tau \cdot T$  und

$$z(\tau) := y(\tau \cdot T), \quad z_{n+1}(\tau) := T \quad 0 \leq \tau \leq 1$$

Dann gilt auf dem festen Intervall  $0 \leq \tau \leq 1$ :

$$\begin{aligned}z'(\tau) &= z_{n+1} f(z_{n+1} \cdot \tau, z(\tau)), & z'_{n+1}(\tau) &= 0 \\r(z(0), z(1)) &= 0\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgabe im  $\mathbb{R}^{n+1}$  über dem festen Integrationsintervall  $[0, 1]$ .

## 4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

### Problem der Brachistochrone (Bernoulli, 1696)

Man bestimme eine differenzierbare Funktion  $y = y(x)$  mit Randbedingungen  $y(a) = y_a$ ,  $y(b) = y_b$ , so dass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(x))^2}{y_a - y(x)}} dx$$

minimal wird.

#### Interpretation:

Das angegebene Funktional  $I[y]$  beschreibt, bis auf einen Vorfaktor, die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve  $y = y(x)$  von Punkt  $A = (a, y_a)$  zum Punkt  $B = (b, y_b)$  zu kommen.

**Allgemeine Form einer Variationsaufgabe:**

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , die die vorgegebenen Randbedingungen

$$y(a) = y_a \quad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

$$I[y] = \int_a^b f(t, y(t), y'(t)) dt$$

minimiert.

**Ziel:**

Leite ein Randwertproblem her, dass zu obiger Variationsaufgabe äquivalent ist.

**Lösungsweg:** (Lagrange, 1755)

Sei  $y_0(t)$  die Lösung des Variationsproblems und  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige differenzierbare Funktion mit

$$h(a) = h(b) = 0$$

Dann setzen wir

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t)$$

Da  $y_0(t)$  die Variationsaufgabe löst, besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[y(\cdot, \cdot, \varepsilon)] = I[y_0 + \varepsilon h]$$

im Punkt  $\varepsilon = 0$  ein Minimum.

Da  $J(\varepsilon)$  eine gewöhnliche Funktion der reellen Variablen  $\varepsilon$  ist, haben wir die notwendige Bedingung

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$



**Definition:**

Der Ausdruck  $\delta I$  definiert durch

$$\delta I := \left. \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h] \right|_{\varepsilon=0}$$

nennt man die **1. Variation** des Funktionals  $I[y]$ .

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss  $\delta I = 0$  gelten.

**Bemerkung:**

1) Die Funktion

$$\delta y(t) := \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

nennt man auch die **1. Variation** der abhängigen Variablen

2) Die erste Variation  $\delta I$  entspricht der Richtungsableitung von  $I[y]$  in Richtung  $h$  an der Stelle  $y_0$ .

Wir berechnen nun die **1. Variation**:

$$\begin{aligned} \delta I &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y'_0 + \varepsilon h') dt \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y'_0) \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y'_0) \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right) \cdot h(t) dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y'_0) \cdot h(t) \Big|_a^b}_{=0} \\ &= \int_a^b \left( f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right) \cdot h(t) dt \end{aligned}$$

Wir erhalten also aus Bedingung  $\delta I = 0$ :

$$\int_a^b \left( f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) \right) \cdot h(t) dt \stackrel{!}{=} 0$$

Da die Funktion  $h(t)$  beliebig ist, folgt das sogenannte **Fundamentallemma der Variationsrechnung**

$$f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0 \quad a \leq t \leq b$$

**Satz:** Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y'_0) - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) &= 0 \\ y_0(a) &= y_a \quad y_0(b) = y_b \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung nennt man die **Euler–Lagrange–Gleichung**.

Wegen

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = f_{y't}(t, y_0, y'_0) + f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0 + f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \cdot y''_0$$

läßt sich die Euler–Lagrange Gleichung unter der Regularitätsbedingung

$$f_{y'y'}(t, y_0, y'_0) \neq 0$$

nach  $y''_0$  auflösen und damit in der expliziten Form

$$y''_0 = \frac{f_y(t, y_0, y'_0) - f_{y't}(t, y_0, y'_0) - f_{y'y}(t, y_0, y'_0) \cdot y'_0}{f_{y'y'}(t, y_0, y'_0)}$$

schreiben.

**Bemerkung:**

Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

- 1) die Funktion  $f$  ist unabhängig von  $y$
- 2) oder  $f$  hängt nicht explizit von  $t$  ab.

## Zwei Spezialfälle:

- 1) Hängt  $f$  nicht von  $y$  ab,  $f = f(t, y')$  so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y'_0) = 0$$

Dies bedeutet aber für alle  $a \leq t \leq b$ :

$$f_{y'}(t, y_0, y'_0) = \text{const.}$$

- 2) Hängt  $f$  nicht explizit von  $t$  ab, so gilt für alle  $a \leq t \leq b$ :

$$H := f - f_{y'}y' = \text{const.}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt} (f - f_{y'}y') = f_y y' + f_{y'} y'' - \left( \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' - f_{y'} y'' \\ &= \left( f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) y' = 0 \end{aligned}$$

## Beispiel: (Problem der Brachistochrone)

Gesucht ist eine  $C^1$ -Funktion  $y(t)$ , die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(x)}} dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \quad y(b) = y_b$$

minimiert. Der Integrand von  $I[y]$  hängt nicht explizit von  $t$  ab, wir bestimmen daher die **Hamilton-Funktion**:

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'}y' \\ &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(x)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \end{aligned}$$

### Hamilton-Funktion:

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(x)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a - y(x)}} = c_1 = \text{const.} \end{aligned}$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{\frac{2c - (y_a - y)}{y_a - y}} \quad 2c := \frac{1}{c_1^2} > 0$$

Trennung der Variablen ergibt die implizite Darstellung:

$$\int_{y_a}^y \sqrt{\frac{y_a - \eta}{2c - (y_a - \eta)}} d\eta = t - a$$

und dies liefert als Lösung eine **Zykloide** (Band 1, Beispiel 14.2.2)

### 4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung:

$$L[y] := y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t)$$

$$R_1[y] := \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1$$

$$R_2[y] := \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \quad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

#### Zunächst:

Das Problem lässt sich stets auf ein **Problem mit homogenen Randbedingungen** zurückführen.

### Rückführung auf homogene Randbedingungen:

Sei  $y_0(t)$  eine  $C^2$ -Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \quad R_2[y_0] = d_2$$

d.h.  $y_0(t)$  erfüllt die gegebenen Randbedingungen.

Wir setzen

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

**Dann gilt:**

Löst  $y(t)$  das Problem

$$L[y] = h(t), \quad R_1[y] = d_1, \quad R_2[y] = d_2,$$

so löst  $z(t)$  das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \quad R_1[z] = 0, \quad R_2[z] = 0$$

### Die Greensche Funktion:

Randwertprobleme zweiter Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen:

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

Man nennt  $G(t, \tau)$ ,  $a \leq t, \tau \leq b$  die **Greensche Funktion**.

### Entscheidender Vorteil:

Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator  $L[y]$  ab, aber **nicht** von der Inhomogenität  $h(t)$ .

Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator  $L[y]$  bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.

## Konstruktion der Greenschen Funktion:

Wir nehmen an, dass  $G(t, \tau)$  auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t, \tau) : a \leq \tau \leq t \leq b\} \quad D_2 := \{(t, \tau) : a \leq t \leq \tau \leq b\}$$

glatt ist, d.h. sich als eine  $\mathcal{C}^2$ -Funktion auf den Rand fortsetzen lässt. dass jedoch  $G(t, \tau)$  für  $t = \tau$  Sprünge haben können.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau \\ y'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^t G(t, \tau) h(\tau) d\tau + \int_t^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau \right\} \\ &= \int_a^b G_t(t, \tau) h(\tau) d\tau + [G(t, t^-) - G(t, t^+)] h(t) \end{aligned}$$

Wir verlangen:

$$G(t, t^-) - G(t, t^+) = 0$$

d.h. die Funktion  $G(t, \tau)$  ist stetig für  $t = \tau$ .

Für die zweite Ableitung gilt dann:

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t, \tau) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \int_a^b L[G(\cdot, \tau)](t) h(\tau) d\tau + [G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+)] h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion  $G(t, \tau)$ :

$$L[G(\cdot, \tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1$$

**Satz:** Erfüllt eine Funktion  $G(t, \tau)$  die folgenden Eigenschaften:

- 1) Die Funktion  $G(t, \tau)$  ist stetig auf  $[a, b]^2$  und lässt sich auf  $D_1$  und  $D_2$  als  $C^2$ -Funktion fortsetzen.
- 2) Die Funktion  $G(t, \tau)$  erfüllt bei festem  $\tau$  die homogene Differentialgleichung  $L[G(\cdot, \tau)] = 0$  für  $t \in [a, \tau]$  und  $t \in [\tau, b]$  und die Randbedingungen:

$$R_k[G(\cdot, \tau)] = 0, \quad k = 1, 2$$

- 3) Die Funktion  $G(t, \tau)$  erfüllt die Bedingung

$$G_t(t, t^-) - G_t(t, t^+) = 1$$

so ist die Lösung  $y(t)$  des Randwertproblems gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t, \tau) h(\tau) d\tau$$

### Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion:

- 1) Ist  $y_1(t), y_2(t)$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so machen wir den **Ansatz**:

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) + b_2(t))y_2(t) & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) - b_2(t))y_2(t) & : \tau \geq t \end{cases}$$

- 2) Die Stetigkeit und Sprungbedingung an  $G(t, \tau)$  liefert dann:

$$b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) = 0$$

$$b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) = \frac{1}{2}$$

Dies ist ein LGS für  $b_1(t)$  und  $b_2(t)$  mit regulärer Koeffizientenmatrix.

- 3) Die Randbedingungen ergeben schliesslich ein LGS für die beiden Größen  $a_1(t)$  und  $a_2(t)$ , das ebenfalls eindeutig lösbar ist.

**Beispiel:** Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0\end{aligned}$$

Ein **Fundamentalsystem** ist  $y_1(t) = \cos t$  und  $y_2(t) = \sin t$ .

Unser **Ansatz** für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t)) \cos t + (a_2(t) + b_2(t)) \sin t & : \tau \leq t \\ (a_1(t) - b_1(t)) \cos t + (a_2(t) - b_2(t)) \sin t & : \tau \geq t \end{cases}$$

**LGS** für die Koeffizienten  $b_1(t)$  und  $b_2(t)$ :

$$\begin{aligned}b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Zur **Lösung** des LGS:

$$\begin{aligned}b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Multipliziere mit  $\sin t$  bzw.  $\cos t$  und addiere:

$$(\sin^2 t + \cos^2 t)b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$$

Damit ergibt sich direkt

$$b_2(t) = \frac{1}{2} \cos t$$

und durch Einsetzen erhalten wir

$$b_1(t) = -\frac{1}{2} \sin t$$



Einsetzen von  $G(t, \tau)$  in **Randbedingungen**:

Die homogenen Randbedingungen lauten

$$y(0) - y(\pi) = 0, \quad y'(0) - y'(\pi) = 0$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned} G(0, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=0} \\ &= a_1(\tau) + b_1(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(\pi, \tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=\pi} \\ &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t(0, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=0} \\ &= a_2(\tau) + b_2(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t(\pi, \tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=\pi} \\ &= -(a_2(\tau) + b_2(\tau)) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$G(0, \tau) - G(\pi, \tau) = (a_1(\tau) - b_1(\tau)) + (a_1(\tau) + b_1(\tau)) = 0$$

$$G_t(0, \tau) - G_t(\pi, \tau) = (a_2(\tau) - b_2(\tau)) + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) = 0$$

Daraus folgt aber:  $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$ .

Die **Greensche Funktion** ist also gegeben durch

$$G(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \leq t \\ -\frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \geq t \end{cases}$$

und die Lösung der Randwertaufgabe lautet:

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^\pi \sin(t - \tau) h(\tau) d\tau$$

Die Lösungsformel gilt für **beliebige** Inhomogenitäten  $h(t)$ .

#### 4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein homogenes lineares Randwertproblem  $n$ -ter Ordnung

$$L[y] = y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t, \lambda)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t, \lambda)y(t) = 0$$

$$R_k[y] = \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_{k,l}y^{(l)}(a) + \beta_{k,l}y^{(l)}(b)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ab.

##### Bestimmung nichttrivialer Lösungen:

Sei  $y_1, \dots, y_n$  ein Fundamentalsystem von  $L[y]$ . Dann hängen die  $y_k$  gegebenenfalls auch von  $\lambda$  ab, d.h.  $y_k = y_k(t, \lambda)$ .

Eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t, \lambda)$$

ist eine Lösung, falls die Randbedingungen

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^n c_k R_j[y_k] = 0, \quad j = 1, \dots, n$$

erfüllt sind. Dies ist ein homogenes LGS für  $c_1, \dots, c_n$  mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \dots & R_1[y_n] \\ \vdots & & \vdots \\ R_n[y_1] & \dots & R_n[y_n] \end{pmatrix}$$

Das Randwertproblem hat also genau dann nichttriviale Lösungen  $y(t) \neq 0$ , falls gilt

$$D(\lambda) := \det \mathbf{E}(\lambda) = 0$$

**Definition:**

Die Werte  $\lambda \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  mit  $D(\lambda) = 0$  heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen nennt man die zugehörigen **Eigenfunktionen**. Diese sind höchstens bis auf skalare Vielfache eindeutig.

Die Bedingung  $D(\lambda) = 0$  ist im allgemeinen ein nichtlineares Nullstellenproblem mit unendlich vielen Lösungen.

**Bemerkung:**

Eigenwertprobleme lassen sich in nichtlineare Randwertaufgaben transformieren: Wir setzen  $y_{n+1}(t) := \lambda$  und findet dann

$$\begin{aligned}y^{(n)}(t) &= -a_{n-1}(t, y_{n+1})y^{(n-1)}(t) - \dots - a_0(t, y_{n+1})y(t) \\y'_{n+1} &= 0 \\R[y, y_{n+1}] &= 0 \\y'(a) &= 1 \quad (\text{Normierung})\end{aligned}$$

**Beispiel:**

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\lambda t) = 0$$

Für die Eigenwerte ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t)$$

## Beispiel:

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) - y'(1) = 0 \Rightarrow c_2(\sin(\lambda) - \lambda \cos(\lambda)) = 0$$

Die Eigenwerte sind also die Lösungen der nichtlinearen Gleichung  $\lambda = \tan \lambda$  mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \lambda_k \neq 0 \\ t & : \lambda_k = 0 \end{cases}$$

## Kapitel 5: Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme

### 5.1 Allgemeines

Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

Wir wollen die Lösung  $y(t)$  an einer Stelle  $b > a$  berechnen.

Kann man die Lösung nicht explizit durch Integration bestimmen, so verwendet man ein

#### Diskretisierungsverfahren:

Definiere Zerlegung des Integrationsintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$$

und die Näherungen

$$Y_j \approx y(t_j), \quad j = 0, \dots, m$$

Man nennt  $h_j := t_{j+1} - t_j$  die **Schrittweite**.

**Definition:** Das Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung  $(Y_0, \dots, Y_m)$  bezeichnet man als **Numerischen Integrator**.

Numerische Verfahren lassen sich bestimmten Klassen zuordnen:

1) **Einschrittverfahren:**

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Man nennt  $\Phi$  die **Verfahrensfunktion**.

2) **Mehrschrittverfahren:**

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j, \dots, Y_{j-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

Man verwendet die bereits berechneten Näherungen  $Y_j, \dots, Y_{j-k}$ .

3) **Extrapolationsverfahren**

Kombiniere ein Einschritt- bzw. Mehrschrittverfahren aus 1) und 2) mit verschiedenen Schrittweiten und extrapoliere das Ergebnis.

**Wichtige Fragen zur Qualität eines Integrators:**

- 1) Es gelte  $Y_j = y(t_j)$ . Welchen Fehler machen wir im nächsten Integrationsschritt, d.h.

$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = ?$$

- 2) Wenn wir die **lokalen** Fehler aus 1) kontrollieren können, was gilt dann zur Zeit  $t = b$ , d.h.

$$|y(b) - Y_m| = ?$$

Insbesondere, wenn wir  $h_j \rightarrow 0$  wählen, d.h. **konvergiert** das Verfahren im Grenzfall  $h_j \rightarrow 0$ ?

- 3) Gibt es eine geeignete Wahl für die Schrittweite  $h_j$ , so dass etwa der Approximationsfehler – etwa im Vergleich zum Rechenaufwand – minimal wird.

## 5.2 Einschrittverfahren

Das **Eulersche Polygonzugverfahren** ist das einfachste Einschrittverfahren

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j f(t_j, Y_j)$$

Das Verfahren entsteht aus der Approximation

$$y'(t_j) = f(t_j, Y_j) \approx \frac{1}{h_j}(Y_{j+1} - Y_j)$$

### Geometrische Deutung:

Zur Berechnung des Wertes  $Y_j$  laufe ich immer ein kurzes Stück in Richtung der Tangente im Punkt  $Y_j$ , d.h. entlang der Geraden mit Steigung  $f(t_j, Y_j)$ .

**Verfahren von Heun:** Wähle den Mittelwert zweier Steigungen

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f(t_j + h_j, Y_j + h_j K_1)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j \left( \frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)$$

**Das modifizierte Euler-Verfahren:** (Collatz, 1960)

Wähle eine mittlere Steigung

$$K_1 := f(t_j, Y_j)$$

$$K_2 := f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} K_1\right)$$

$$Y_{j+1} := Y_j + h_j K_2$$

**Definition:**

Gegeben sei die Näherung  $(t_j, Y_j)$  und ein Einschrittverfahren in der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Sei  $z(t)$  die Lösung des (lokalen) Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \quad z(t_j) = Y_j$$

1) Das **exakte Inkrement** ist gegeben durch

$$\Delta(t_j, Y_j, h) := \frac{z(t_j + h) - Y_j}{h}$$

2) Man nennt dann

$$\tau(t_j, Y_j, h) := \Delta(t_j, Y_j, h) - \Phi(t_j, Y_j, h)$$

den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

**Definition:** (Fortsetzung)

3) Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten  $f(t, y)$  gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung**  $p$ , falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists C, h_0 > 0 : \forall h \in (0, h_0] : |\tau(t_j, Y_j, h)| \leq Ch^p$$

**Bemerkung:** Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h}(z(t_{j+1}) - Y_{j+1})$$

darstellen, d.h.  $\tau$  ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

### Bestimmung der Konsistenzordnung:

Man verwendet dazu die Taylor-Entwicklung von  $z(t+h)$  um  $h=0$

$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \dots$$

Nun gilt neben  $z(t) = Y$

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

$$z''(t) = f_t(t, z) + f_y(t, z)z' = f_t(t, z) + f_y(t, z)f(t, z)$$

$$z^{(3)}(t) = f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d$$

Wir erhalten daher für  $\Delta(t, y, h) = (z(t+h) - Y)/h$  den Ausdruck

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d) + O(h^3)$$

### Beispiel:

1) Beim Euler-Verfahren gilt  $\Phi = f(t, Y)$  und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t f_y f) + O(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t f_y f) + O(h^2)$$

Das Verfahren ist also konsistent erster Ordnung.

2) Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{2}(f(t, Y) + f(t+h, Y + hf(t, Y))) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{2}(f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + O(h^2)\right)\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tau = \Delta - \Phi = O(h^2)$$

Das Heun-Verfahren ist ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung.



**Satz:**

Die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

existiere im Intervall  $[a, b]$ . Das Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

sei konsistent und besitze die Ordnung  $p$  mit  $|\tau(t, Y, h)| \leq Ch^p$ .

Ferner sei die Verfahrensfunktion  $\Phi$  Lipschitz–stetig bezüglich  $Y$ :

$$|\Phi(t, \tilde{Y}, h) - \Phi(t, Y, h)| \leq L|\tilde{Y} - Y|$$

Dann gilt für die mit äquidistanter Schrittweite  $h = (b - a)/m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , berechneten Näherungen  $Y_m = Y(b; h)$  von  $y(b)$ :

$$|Y(b; h) - y(b)| \leq \frac{1}{L} (e^{L(b-a)} - 1) Ch^p$$

**Runge–Kutta–Verfahren:**

Allgemeine Form mit **Stufenzahl**  $s$

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_1(t, Y, h) = f(t, Y)$$

$$K_i(t, Y, h) = f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)$$

**Schreibweise:** (Butcher–Schema)

0				
$a_2$	$b_{21}$			
$a_3$	$b_{31}$	$b_{32}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
$a_s$	$b_{s1}$	$b_{s2}$	$\dots$	$b_{s,s-1}$
	$c_1$	$c_2$	$\dots c_{s-1}$	$c_s$

**Beispiele:**

1) Verfahren von Heun ( $p = 2$ )

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2) Modifiziertes Euler–Verfahren ( $p = 2$ )

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

**Beispiele:**

3) Kutta–Regel ( $p = 3$ )

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ 1 & -1 & 2 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

4) Klassische Runge–Kutta–Verfahren ( $p = 4$ )

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

## Runge–Kutta–Fehlberg–Verfahren

Man kombiniert zwei RK–Verfahren der Ordnung  $p$  und  $p + 1$ , um eine automatische Schrittweitensteuerung zu generieren:

$$\frac{z(t_j + h) - Y_{j+1}}{h} = Ch^p + O(h^{p+1})$$

$$\frac{z(t_j + h) - \hat{Y}_{j+1}}{h} = O(h^{p+1})$$

Daraus folgt aber

$$\tau(t_j, Y_j, h) \approx Ch^p \approx \frac{|\hat{Y}_{j+1} - Y_j|}{h} =: \tau_{est}$$

Wähle die Schrittweite stets so, dass

$$\tau_{est} \leq \text{TOL}$$

mit gegebener Genauigkeitstoleranz TOL gilt.

## Allgemeine Form der RKF–Verfahren:

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^s c_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$\hat{Y}_{j+1} = Y_j + h_j \sum_{i=1}^{\hat{s}} \hat{c}_i K_i(t_j, Y_j, h_j)$$

$$K_i(t, Y, h) = f \left( t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l \right)$$

**Beispiel:** RKF2(3)–Verfahren nach Fehlberg (1969)

0			
1			1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
<hr/>			
$p = 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$p = 3$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

**Beispiel:** RKF4(5)–Verfahren nach England (1969)

0						
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
1	0	-1	2			
$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{10}{27}$	0	$\frac{1}{27}$		
$\frac{1}{5}$	$\frac{28}{625}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{546}{625}$	$\frac{54}{625}$	$-\frac{378}{625}$	
	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	
	$\frac{14}{336}$	0	0	$\frac{35}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{125}{336}$

### 5.3 Anfangswertmethoden für Randwertprobleme

#### Das einfache Schießverfahren (shooting method)

Wir betrachten ein Randwertproblem zweiter Ordnung der Form

$$y'' = f(t, y, y')$$
$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

#### Idee eines Schießverfahrens:

Kombiniere ein numerisches Verfahren für das zugehörige Anfangswertproblem

$$y'' = f(t, y, y')$$
$$y(a) = y_a, \quad y'(a) = z$$

mit einem iterativen Prozess bezüglich des (freien) Parameters  $z$ , um die rechte Randbedingung zu erfüllen, d.h.

$$y(b) = y_b$$

Bezeichnen wir mit  $y(t; z)$  die Lösung des Anfangswertproblems, so führt das Schießverfahren auf ein Nullstellenproblem der Funktion

$$F(z) := y(b; z) - y_b$$

**Beispiel:** Für die Randwertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

erhalten wir das zugehörige Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = z$$

die Lösung

$$y(x) = z \sin x + 4 \cos x$$

Die Funktion  $F(z)$  lautet daher

$$F(z) = z \sin 1 + 4 \cos 1 - 1$$

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $F(z) = 0$  haben wir zwei Verfahren kennengelernt:

- 1) **Das Bisektionsverfahren** Seien  $z_1$  und  $z_2$  zwei Punkte mit  $F(z_1) \cdot F(z_2) < 0$ :

$$z_3 := \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\text{Falls } F(z_1) \cdot F(z_3) < 0 : z_1 := z_3$$

$$\text{sonst} : z_1 := z_2$$

- 2) **Das Newtonverfahren**

Iterationsvorschrift:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{F(z_k)}{F'(z_k)}$$

Das Newton-Verfahren konvergiert i.A. quadratisch, aber man muss die Ableitung  $F'(z_k)$  berechnen.

## Allgemeine Zweipunkt–Randwertprobleme

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n \\r(y(a), y(b)) &= 0\end{aligned}$$

**Schießverfahren:** Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n \\y(a) &= z \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

mit der Lösung  $y(t; z)$ .

Das äquivalente Nullstellenproblem lautet jetzt:

$$F(z) := r(z, y(b; z)) = 0$$

Die Funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist glatt, falls  $r(u, v)$  und  $f(t, y)$  hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

Zur Lösung des Nullstellenproblems  $F(z) = 0$  verwendet man etwa das **gedämpfte Newton–Verfahren** aus Analysis III :

für  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$Jf(z^k) \cdot \Delta z^k = -f(z^k)$$

$$z^{k+1} = z^k + \lambda_k \Delta z^k$$

Dabei ist die Jacobi–Matrix  $Jf(z)$  gegeben durch

$$Jf(z) = B_a + B_b \cdot Y(b)$$

$$B_a := \left. \frac{\partial}{\partial u} r(u, v) \right|_{(z, y(b; z))}$$

$$B_b := \left. \frac{\partial}{\partial v} r(u, v) \right|_{(z, y(b; z))}$$

$$Y(b) := \frac{\partial}{\partial z} y(b; z)$$

**Beispiel:** (für das das Schießverfahren **nicht** funktioniert)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned}y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1\end{aligned}$$

Für  $\lambda = 5$  besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = z\end{aligned}$$

nur für  $|z| \leq 0.05$  eine Lösung, die auf dem ganzen Intervall  $[0, 1]$  existiert.

Für die tatsächliche Lösung der Randwertwertaufgabe gilt

$$z^* = 0.0457504\dots$$

**Beispiel:** (Lösung kann bezüglich  $z$  stark variieren)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = 12y + y', \quad y(0) = y(10) = 1$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe kann man explizit berechnen:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}$$

Mit den Randwerten  $y(0) = y(10) = 1$  folgt

$$z_1^* = y(0) = 1, \quad z_2^* = y'(0) = -3 + 2.9\dots \cdot 10^{-17}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}y(10; 1, -3) &= e^{-30} \approx 9.36 \cdot 10^{-14} \\ y(10; 1, -3 + 10^{-10}) &\approx \frac{1}{7} e^{30} \approx 1.53 \cdot 10^{12}\end{aligned}$$

Korrekte numerische Berechnung nahezu unmöglich!

## Die Mehrzielmethode (multiple shooting method)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n \\r(y(a), y(b)) &= 0\end{aligned}$$

Kombiniere das (einfache) Schießverfahren mit einer Intervallunterteilung von  $[a, b]$ :

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

Man nennt die  $t_i$ 's auch die **Mehrzielknoten**.

Löse auf jedem Teilintervall (numerisch) das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= f(t, y(t)), \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \\y(t_j) &= z_j\end{aligned}$$

und bezeichne die Lösung mit  $y(t; t_j, z_j)$ ,  $j = 1, \dots, m - 1$ .

Die zusammengesetzte Lösung

$$y(t; z_1, \dots, z_{m-1}) := \begin{cases} y(t; t_1, z_1) & : t_1 \leq t < t_2 \\ y(t; t_2, z_2) & : t_2 \leq t < t_3 \\ \vdots & \vdots \\ y(t; t_{m-1}, z_{m-1}) & : t_{m-1} \leq t < t_m \end{cases}$$

erfüllt genau dann die Randwertaufgabe, wenn gilt

$$\mathbf{F}_j(z_j, z_{j+1}) := y(t_{j+1}; t_j, z_j) - z_{j+1} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m - 2$$

$$\mathbf{F}_{m-1}(z_1, z_{m-1}) := r(z_1, y(t_m; t_{m-1}, z_{m-1})) = \mathbf{0}$$

Dies ist äquivalent zu einem Nullstellenproblem für die Funktion

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_{m-1})^T : D \rightarrow \mathbb{R}^{(m-1)n}, \quad D \subset \mathbb{R}^{(m-1)n}$$

Zur Lösung verwendet man wieder das gedämpfte Newton-Verfahren.