Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Ingenuin Gasser

Fachbereich Mathematik

Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg–Harburg

Wintersemester 2009/10

Kapitel 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen

1.1 Einführung und Beispiele

Definition:

Ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

mit

$$\mathbf{F} : [a, b] \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{\text{(m+1)–fach}} \to \mathbb{R}^n$$

heißt ein **implizites gewöhnliches Differentialgleichungssystem der Ordnung** m.

Läßt sich das System nach $\mathbf{y}^{(m)}(t)$ auflösen, so ergibt sich das **explizite System** der Form:

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Im Folgenden suchen wir stets eine C^m–Funktion

$$\mathbf{y} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

die das Differentialgleichungssystem erfüllt, d.h. es gilt

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

für alle $t \in [a,b]$ beziehungsweise

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Spezialfall:

Hängen die Funktionen $\mathbf{F}$ bzw. $\mathbf{f}$ nicht explizit von (der Zeit) t ab, so nennt man das System **autonom**, d.h.

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m)}(t)) = 0$$

oder

$$\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}'(t), \ldots, \mathbf{y}^{(m-1)}(t))$$

Lösungen nennt man dann auch **Trajektorien** der DGL.

Beispiel: Die skalare Gleichung erster Ordnung

$$y'(t) = y(t)$$

hat auf jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unendlich viele Lösungen der Form

$$y(t) = C \cdot e^t, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Problem 1: (Anfangswertaufgabe)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)),\ a \le t \le b,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{y}_a \qquad \text{(Anfangswert)} \end{aligned}$$

Problem 2: (Randwertaufgabe)

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= f(t, \mathbf{y}(t)),\ a \le t \le b,\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \qquad \text{(Randwert)} \\ \mathbf{r} &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Beispiel: Populationsmodell I

Sei $N(t) =$ Größe einer Population, z.B. Bakterien auf Nährboden

Änderung in kleinen Zeitabschnitten wird bestimmt durch

$$b = \text{ Geburtenrate} \qquad d = \text{ Sterberate}$$

Damit gilt

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \approx (b - d)N(t)$$

Im Grenzwert $\Delta t \to 0$ erhält man die **Differentialgleichung**:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N(t), \qquad \alpha = b - d$$

Mit der Anfangsbedingung $N(t_0) = N_0$ erhält man die eindeutige Lösung

$$N(t) = N_0 e^{\alpha(t-t_0)}$$

$\Rightarrow$ **Exponentielles Wachstum**

Beispiel: Populationsmodell II

Bei exponentiellem Wachstum gilt

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = \infty$$

Unrealistisch!

Suche Modell mit

$$\lim_{t \to \infty} N(t) = K < \infty$$

Verhulst: Wachstumsrate ist eine mit $N(t)$ linear fallende Funktion

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t)(K - N(t))$$

Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$N(t) = \frac{K \cdot N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-\lambda K(t - t_0)}}$$

$\Rightarrow$ **Logistisches Wachstum**

Beispiel: Regelkreisglied

Mechanisches Feder–Dämpfer–System mit Anregung:

$$\begin{aligned} y_e(t) &= \text{vorgegebene Eingangsgröße} \\ y_a(t) &= \text{Ausgangsgröße} \\ K_F &= K(y_e - y_a) = \text{Federkraft} \\ K_D &= r\,\dot{y}_a(t) = \text{Dämpferkraft} \end{aligned}$$

wobei K Federkonstante und r Dämpfungskoeffizient.

Differentialgleichung

$$\dot{y}_a(t) = -\lambda y_a(t) + \lambda y_e(t), \qquad \lambda = \frac{K}{r}$$

Lösung des Anfangswertproblems bei Vorgabe von $y_e(t)$, $t \geq t_0$:

$$y_a(t) = y_a(t_0)e^{-\lambda(t-t_0)} + \lambda \int_{t_0}^{t} y_e(\tau)e^{\lambda(\tau-t)}d\tau$$

Beispiel: Newtonsche Abkühlung

Temperatur $T(t)$ eines homogenen Körpers (räumlich gemittelt):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{k \cdot F}{c \cdot m}(T_a(t) - T(t))$$

wobei

$$\begin{aligned} T_a(t) &= \text{Umgebungstemperatur} \\ m &= \text{Masse des Körpers} \\ F &= \text{Oberfläche} \\ c &= \text{spezifische Wärme} \\ k &= \text{Proportionalitätsfaktor} \end{aligned}$$

Differentialgleichung ist identisch mit der des Regelkreisglieds!!

Insbesondere gilt: $T(t) \to T_a(t)$ für $t \to \infty$

Beispiel: Elektrischer Schwingkreis

Gegeben seien:

$$\begin{aligned} R &= \text{Ohmscher Widerstand} \\ L &= \text{Induktivität} \\ C &= \text{Kapazität} \end{aligned}$$

Für die Spannungsabfälle gilt:

$$U_R = R \cdot I, \quad U_L = L \cdot \dot{I}, \quad I = C \cdot \dot{U}_C$$

sowie bei vorgegebener Spannung $U(t)$:

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

Ersetze in U_R und U_L die Variable I durch $C \cdot \dot{U}_C$:

$$R \cdot C \cdot \dot{U}_C + L \cdot C \cdot \ddot{U}_C + U_C = U(t)$$

Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$LC\,\ddot{U}_C + RC\,\dot{U}_C + U_C = U(t)$$

Typische Vorgabe: Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Achtung: Anfangswertproblem mit Vorgabe von

$$U_C(t_0) = C_1 \qquad \textbf{und} \qquad \dot{U}_C(t_0) = C_2$$

Schreibe Differentialgleichung auch als **System erster Ordnung**:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{R}{L}\,y_2 - \frac{1}{LC}\,y_1 + \frac{1}{LC}U \end{aligned}$$

wobei $y_1 := U_c$ und $y_2 := \dot{U}_C$.

Richtungsfeld: (einer skalaren Differentialgleichung erster Ordnung)

Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \qquad (y(t) \in \mathbb{R})$$

Betrachte an jedem Punkt $(t, y) \in \mathbb{R}^2$ den Richtungsvektor $v = (1, y')^T$ in der Tangentenrichtung $y' = f(t, y)$ (Richtungsfeld).

Beispiel: (auf Folie) Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = y$.

Definition: Ein Tripel $(t, y, y') \in \mathbb{R}^3$ welches die Gleichung $y' = f(t, y)$ erfüllt nennt man ein **Linienelement** der Differentialgleichung.

“Erraten” der Lösung aus einer Skizze des Richtungsfelds:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

Linienelemente der Differentialgleichung

$$y' = -\frac{t}{y}$$

sind gegeben durch die Tripel $\left(t, y, -\frac{t}{y}\right) \in \mathbb{R}^3$.

Richtungsvektor v im Punkt (t, y) ist gegeben durch

$$v = (1, y')^T = \left(1, -\frac{t}{y}\right)^T$$

und es gilt

$$v \perp r = (t, y)^T \quad \text{(Ortsvektor)}$$

Lösung sind (geometrisch gesehen) Kreise in der (t, y)–Ebene:

$$y(t) = \pm\sqrt{r^2 - t^2} \qquad (-r < t < r)$$

1.2 Elementare Lösungsmethoden

Typ A: Separierbare Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y)$$

in einem Bereich D der (t, y)–Ebene. Gilt $g(y) \neq 0$, so lassen sich die Variablen t und y **trennen**:

$$\frac{y'(t)}{g(y)} = f(t)$$

Integration mittels Substitutionsregel:

$$\int\limits_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Bezeichnen wir mit $H(y)$ eine Stammfunktion von $1/g(y)$, also

$$H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

so folgt

$$H(y) = H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau$$

Da $g(y) \neq 0$, ist die Stammfunktion $H(y)$ injektiv und daher invertierbar:

$$y(t) = H^{-1}\left(H(y_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau \right), \qquad H(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

Beispiel: Betrachte die Gleichung $y' = -t/y$:

$$yy' = -t \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{y_0}^{y} \eta d\eta = -\int\limits_{t_0}^{t} \tau d\tau$$

Daraus folgt:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2} = -\frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) \quad \Rightarrow \quad y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Unter Vorgabe einer Anfangsbedingung

$$y(t_0) = y_0$$

erhalten wir die Lösungen in der Form

$$y^2 + t^2 = y_0^2 + t_0^2 = r^2$$

Dies sind gerade Kreise in der (t, y)–Ebene.

Typ B: Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

lassen sich durch die Substitution

$$u(t) := \frac{y(t)}{t}$$

auf separierbare Gleichungen zurückführen:

$$f(u) = y'(t) = (tu(t))' = u(t) + tu'(t)$$

Auflösung nach $u'(t)$ ergibt die separierbare Gleichung

$$u'(t) = \frac{f(u) - u}{t}$$

Beispiel:

Gesucht ist die Ortslinie aller Punkte, für die der Tangentenabschnitt auf der y–Achse gleich dem Abstand des Punktes vom Ursprung ist.

Beispiel: (Fortsetzung)

Die zugehörige Differentialgleichung lautet also:

$$y - ty' = \sqrt{t^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$$

Substitution $u = y/t$ ergibt:

$$u' = -\frac{\sqrt{1 + u^2}}{t}$$

Trennung der Variablen liefert zunächst:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{dt}{t}$$

und damit

$$\ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) = -\ln|t| + C_1$$

Aus der Beziehung (siehe Analysis II)

$$\operatorname{arcsinh}(u) = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)$$

folgt

$$u = \sinh(-\ln|t| + C_1)$$

und damit durch Rücksubstitution

$$\frac{y}{t} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{C_1}}{t} - te^{-C_1}\right)$$

Wählt man $C = e^{C_1}$, so erhalten wir

$$2y = C - \frac{t^2}{C}$$

und es ergibt sich als Lösung die Parabelschar:

$$t^2 = C^2 - 2Cy, \qquad C = e^{C_1}$$

Typ C: Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) = h(t)$$

mit **Inhomogenität** $h(t)$.
Man nennt die Gleichung **homogen**, falls $h(t) = 0$.

Die **allgemeine Lösung** läßt sich stets in der Form

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

schreiben.

Dabei ist $y_p(t)$ eine **spezielle** (partikuläre) Lösung und $y_h(t)$ die **allgemeine** Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h'(t) + a(t)y_h(t) = 0$$

ist.

I. Berechnung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung:

Trennung der Variablen

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + a(t)y_h(t) = 0$$

ergibt mittels Integration

$$\int \frac{dy_h}{y_h} = -\int a(t)dt$$

und man erhält die **allgemeine Lösung**

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

mit einer beliebigen (Integrations–)Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

II. Berechnung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung:

Dazu verwendet man den Ansatz (**Variation der Konstanten**)

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right)$$

Einsetzen in die **inhomogene** Gleichung ergibt

$$C'(t) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau\right) - a(t)y_p(t) + a(t)y_p(t) = h(t)$$

Durch **Integration** der Differentialgleichung für $C(t)$ erhält man

$$C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} h(\tau) \cdot \exp\left(-\int\limits_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi\right) d\tau$$

Spezialfälle:

Konstante Koeffizienten $a(t) =$ const. und spezielle Form von $h(t)$

Folgende **Ansätze** liefern dann **einfacher** eine spezielle Lösung

$h(t)$	$y_p(t)$
$\sum\limits_{k=0}^{m} b_k t^k$	$\sum\limits_{k=0}^{m} c_k t^k$
$b_1 \cos(\omega t) + b_2 \sin(\omega t)$	$c \sin(\omega t - \gamma)$
$be^{\lambda t}$	$ce^{\lambda t}$ falls $\lambda \neq -a$
	$ce^{\lambda t}$ falls $\lambda = -a$

Beispiel: Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) + y(t) = \sin t$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(t) = C \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} d\tau\right) = C \cdot \exp(t_0 - t)$$

Variation der Konstanten

$$y_p(t) = C(t) \cdot \exp(t_0 - t)$$

Einsetzen ergibt

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \sin(\tau) \cdot \exp(\tau - t_0)\, d\tau$$

Bestimmung einer **speziellen** Lösung über den **Ansatz**

$$y_p(t) = C \sin(t-\gamma)$$

Einsetzen ergibt

$$C \cos(t-\gamma) + C \sin(t-\gamma) = \sin t$$

Additionstheoreme

$$C(\cos t \cos\gamma + \sin t \sin\gamma) + C(\sin t \cos\gamma - \cos t \sin\gamma) = \sin t$$

Daraus folgt

$$C \cos t(\cos\gamma - \sin\gamma) + C \sin t(\sin\gamma + \cos\gamma) = \sin t$$

sowie

$$\cos\gamma - \sin\gamma = 0, \quad \sin\gamma + \cos\gamma = \sqrt{2}, \quad C = 1/\sqrt{2}$$

Typ D: **Bernoullische Differentialgleichungen**

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)(y(t))^{\alpha} = 0 \qquad (\alpha \neq 0, 1)$$

lassen sich durch die Substitution

$$u(t) := (y(t))^{1-\alpha}$$

stets auf lineare Differentialgleichungen zurückführen:

$$u'(t) + (1-\alpha)a(t)u(t) = (\alpha - 1)b(t)$$

Probleme ergeben sich bei der Rücksubstitution

$$y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Zum Beispiel kann $y(t)$ (in endlicher Zeit) singulär werden.

Beispiel: Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(t) = y(t) + ty^2(t)$$

Eine Lösung ist $y(t) = 0$. Substitution $u(t) = 1/y(t)$ ergibt

$$u'(t) + u(t) = -t$$

Lösung $u(t)$ besteht aus allgemeiner plus spezieller Lösung

$$u(t) = C \cdot e^t + 1 - t$$

Rücksubstitution

$$y(t) = \frac{1}{1 - t + C \cdot e^t} \qquad (C \text{ Konstante})$$

Konkretes Beispiel:
Mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ existiert die Lösung nur auf dem Intervall $[-1.6783\ldots, 0.7680\ldots]$.

Typ E: Riccatische Differentialgleichungen

Differentialgleichungen der Form

$$y'(t) + a(t)y(t) + b(t)y^2(t) = c(t)$$

lassen sich nur in speziellen Fällen in geschlossener Form lösen:
Sei eine spezielle Lösung $y_p(t)$ bekannt $\Rightarrow$ Substitution

$$u(t) := \frac{1}{y(t) - y_p(t)}$$

Dann löst $u(t)$ die lineare Gleichung

$$u'(t) - [a(t) + 2b(t)y_p(t)]u(t) = b(t)$$

Beispiel: Gegeben sei die Riccatische Gleichung

$$y'(t) = -2t + 3ty(t) - ty^2(t)$$

Man sieht direkt, dass $y_p(t) = 1$ eine spezielle Lösung ist.

Beispiel: (Fortsetzung)

Substitution $u(t) = 1/(y(t) - 1) \;\Rightarrow\; y = 1 + 1/u$ liefert

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u^2 y' \\ &= -u^2(-2t + 3ty(t) - ty^2(t)) \\ &= -u^2 \left(-2t + 3t + \frac{3t}{u} - t - \frac{2t}{u} - \frac{t}{u^2}\right) \\ &= -tu(t) + t \end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichung:

$$u(t) = 1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

und damit

$$y(t) = 1 + \frac{1}{1 + C \cdot \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}$$

Typ F: Exakte Differentialgleichungen

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$g(t, y(t)) + h(t, y(t))\, y'(t) = 0$$

Annahme: Es existiert eine Funktion $\Phi(t, y)$ mit:

$$\frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial t} = g(t, y), \qquad \frac{\partial \Phi(t, y)}{\partial y} = h(t, y)$$

Dann folgt

$$\frac{d\Phi(t, y(t))}{dt} = \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(t, y(t))}{\partial y}\, y'(t) = 0$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind dann gegeben durch

$$\Phi(t, y(t)) = C = \text{ const.}$$

Man nennt die Differentialgleichung $g + hy' = 0$ dann **exakt**.

Analysis III: Definiere ein **Vektorfeld** $F(t,y)$:

$$F(t,y) := (g(t,y), h(t,y))^T$$

Die Differentialgleichung heißt **exakt**, falls F ein **Potential** besitzt:

$$g(t,y) = \Phi_t(t,y), \quad h(t,y) = \Phi_y(t,y) \qquad \Phi \in \mathcal{C}^1$$

Dies geht nicht immer: **Integrabilitätsbedingung**

Satz:

Sind die beiden Funktionen $g(t,y)$ und $h(t,y)$ stetig differenzierbar und ist der Definitionsbereich einfach zusammenhängend, so besitzt das Vektorfeld F ein Potential Φ genau dann, wenn im Definitionsbereich die Bedingung

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(t,y)$$

erfüllt ist.

Berechnung des Potentials $\Phi(t, y)$ über **Kurvenintegral**:

$$\Phi(t, y) = \int\limits_{c_{(t,y)}} F(\tau, \eta) d(\tau, \eta)$$

Dabei bezeichnet $c_{(t,y)}$ eine $\mathcal{C}^1$–Kurve, die die Punkte (t_0, y_0) (fest) und (t, y) (variabel) verbindet.

Gilt $D = \mathbb{R}^2$, so kann man den **Hakenweg**

$$(t_0, y_0) \quad \rightarrow \quad (t, y_0) \quad \rightarrow \quad (t, y)$$

wählen und erhält für das Potential die Darstellung

$$\Phi(t, y) = \int\limits_{t_0}^{t} g(\tau, y_0) d\tau + \int\limits_{y_0}^{y} g(t, \eta) d\eta$$

Beispiel: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1 + 2ty + y^2) + (t^2 + 2ty)y' = 0 \qquad (\,(t, y) \in \mathbb{R}^2\,)$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 + 2ty) = \frac{\partial}{\partial y}(1 + 2ty + y^2) = 2(t + y)$$

ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, d.h. die Gleichung ist **exakt**.

Berechnung des Potentials:
Erster Schritt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = g = 1 + 2ty + y^2$$

Integration bezüglich t ergibt

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2 y + C(y)$$

Beachte: Integrationskonstante kann von y abhängen!!

Zweiter Schritt: Wir haben bereits die Form

$$\Phi(t, y) = t(1 + y^2) + t^2 y + C(y)$$

Es muss aber noch gelten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = h = t^2 + 2ty$$

Einsetzen des Ergebnisses aus dem ersten Schritt liefert

$$2ty + t^2 + C'(y) = t^2 + 2ty \quad \Rightarrow \quad C(y) = \text{ const.}$$

(Implizite) Lösung der Gleichung

$$t(1 + y^2(t)) + t^2 y(t) = C$$

Methode des integrierenden Faktors:

Gegeben sei die **nicht** exakte Differentialgleichung

$$g(t,y) + h(t,y)\,y' = 0$$

Wir suchen nun eine Funktion $m(t,y)$ so, dass die Gleichung

$$m(t,y)g(t,y) + m(t,y)h(t,y)\,y' = 0$$

eine **exakt** Differentialgleichung ist.

Bedingung: Integrabilitätsbedingung ist erfüllt!

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot h) - \frac{\partial}{\partial y}(m \cdot g) = 0$$

Daraus ergibt sich die Bedingung:

$$\left(h\frac{\partial m}{\partial t} - g\frac{\partial m}{\partial y}\right) + m\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

Zwei einfache Sonderfälle:

1. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(t)$ nur von t abhängt.

$$\frac{dm}{dt} = - \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) /h\right]}_{\textbf{Bed.: }\text{hängt nur von } t \text{ ab}} \cdot m(t)$$

2. Fall: Wir nehmen an, dass $m = m(y)$ nur von y abhängt.

$$\frac{dm}{dy} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right) /g\right]}_{\textbf{Bed.: }\text{hängt nur von } y \text{ ab}} \cdot m(y)$$

In beiden Fällen erhalten wir eine **gewöhnliche** Differentialgleichung und die Lösung m ist ein integrierender Faktor!

Beispiel: Gegeben sei die **nicht** exakte Gleichung

$$(1 - ty) + (ty - t^2)y' = 0$$

Es gilt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)/h = \frac{y - t}{ty - t^2} = \frac{1}{t}$$

Ansatz:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{1}{t} \cdot m(t) \quad \Rightarrow \quad m(t) = \frac{1}{t}$$

Damit ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{t} - y\right) + (y - t)y' = 0 \qquad (t \neq 0)$$

exakt und die (implizite) Lösung lautet

$$\Phi(t, y(t)) = \ln|t| - ty(t) + \frac{1}{2}y^2(t) = \text{ const.}$$

1.3 Elementare Lösungsmethoden für Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Typ A: Gegeben sei eine Gleichung zweiter Ordnung der Form

$$y''(t) = f(t, y'(t))$$

Die rechte Seite der DGL hängt also nicht von $y(t)$ ab.

Setzen wir $z(t) := y'(t)$, so erhält man eine Gleichung **erster** Ordnung:

$$z'(t) = f(t, z(t))$$

Läßt sich diese Gleichung lösen, so folgt

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} z(\tau) d\tau$$

Beispiel: Die sogenannte **Kettenlinie** ist die Lösung der Gleichung

$$y''(t) = k\sqrt{1 + (y'(t))^2}$$

Die Subtitution $z(t) := y'(t)$ ergibt die Gleichung erster Ordnung

$$z'(t) = k\sqrt{1 + z^2(t)}$$

Mittels Trennung der Variablen findet man

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2(t)}} = k \int dt$$

und daher

$$z(t) = \sinh(kt + c_1)$$

mit der Integrationskonstanten c_1.

Integration von $z(t)$ ergibt die Kettenlinie $y(t)$ in der Form

$$y(t) = \frac{1}{k}\cosh(kt + c_1) + c_2$$

Typ B: Gegeben sei eine autonome Gleichung zweiter Ordnung

$$y''(t) = f(y(t), y'(t))$$

Nimmt man an, dass die Lösung auf einem Intervall **streng monoton** ist, so existiert die Umkehrabbildung $t = t(y)$ und

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y'(t(y))}$$

Setzt man $v(y) := y'(t(y))$, so folgt

$$\frac{dv}{dy} = y''(t(y)) \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} f(y, v(y))$$

Differentialgleichung **erster Ordnung**

Ist die Lösung $v(y)$ bekannt, so erhält man $y(t)$ durch Auflösen von

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{v(y)} \quad \Rightarrow \quad t - t_0 = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{v(y)}$$

Typ C: Betrachte man den Spezialfall einer autonome Gleichung der Form

$$y''(t) = f(y(t))$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} y'y'' &= f(y)y' \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(y'\right)^2 &= \int f(y)dy =: F(y) + C \\ \Rightarrow \quad y' &= \pm\sqrt{2(F(y)+C)} \end{aligned}$$

Die Funktion $y(t)$ sei invertierbar (auf einem gewissen Bereich)

$$\frac{dt}{dy} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$

und man erhält $y(t)$ durch Auflösen von

$$t = t(y) = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{2(F(y)+C)}}$$

Kapitel 2: Theorie der Anfangswertaufgaben

Wir betrachten im Folgenden stets das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Rechte Seite $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, D offen und $\mathbf{y}_0 \in D$.

Die **Fragen**, die wir beantworten wollen: 3Y

a) **Existiert** eine Lösung $\mathbf{y}(t)$ in einer Umgebung $|t - t_0| < \varepsilon$ der Anfangszeit?

b) Ist diese Lösung **eindeutig** bestimmt?

c) Wie weit lässt sich die Lösung in der Zeit **fortsetzen**?

d) Wie **verändert** sich die Lösung bei Störung der Anfangsdaten $(t_0, \mathbf{y}_0)$ oder der rechten Seite $f(t, \mathbf{y})$?

2.1 Existenz und Eindeutigkeit für Anfangswertaufgaben

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \sqrt{|y(t)|}, \qquad y(0) = 0$$

Diese Gleichung besitzt **beliebig viele** Lösungen: seien $\alpha, \beta > 0$

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t+\alpha)^2 & : \quad -\infty < t \le -\alpha \\ 0 & : \quad -\alpha < t \le \beta \\ \frac{1}{4}(t+\beta)^2 & : \quad \beta < t < \infty \end{cases}$$

Eigenschaften der rechten Seite:

1) Die rechte Seite ist **stetig** und **beschränkt** auf $D = \mathbb{R} \times [-a, a]$, $a > 0$,

2) Die rechte Seite ist dort **nicht** Lipschitz–stetig,

3) Die rechte Seite ist bei $y = 0$ **nicht** differenzierbar.

Satz: (Existenzsatz von Peano (1890))

Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und es gelte $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

im Intervall $|t - t_0| < \varepsilon$ eine Lösung besitzt.

Konstruktiver Beweis mittels des **Eulerschen–Polygonzug–Verfahrens**:

Rekursive Berechnung einer (diskreten) Näherungslösung

$$t_{i+1} := t_i + h_i, \qquad \mathbf{y}_{i+1} := \mathbf{y}_i + h_i f(t_i, \mathbf{y}_i)$$

mit den Startwerten $(t_0, \mathbf{y}_0)$.

Näherungslösungen **konvergieren** gegen eine Lösung für $h_i \to 0$.

Bemerkung: Jede Lösung eines Anfangswertproblems lässt sich auf ein maximales Existenzintervall $-\infty \le t_{\text{min}} < t < t_{\text{max}} \le \infty$ fortsetzen.
Der Graph $(t, \mathbf{y}(t))$ der Lösung kommt dabei für $t \to t_{\text{min}}$ bzw. $t \to t_{\text{max}}$ dem Rand von D beliebig nahe, d.h. jeder Häufungspunkt von $(t, \mathbf{y}(t))$ für $t \to t_{\text{min}}$ bzw. $t \to t_{\text{max}}$ liegt auf dem Rand ∂D.

Beispiel:

1) Die Lösung $y(t) = \exp(t)$ des Anfangswertproblems

$$y' = y, \qquad y(0) = 1$$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Also ist $t_{\text{min}} = -\infty$ und $t_{\text{max}} = \infty$.
Es ist $D = \mathbb{R}^2$ und

$$\begin{aligned} \lim_{t \to t_{\text{min}}} (t, y(t)) &= (-\infty, 0) \in \partial D \\ \lim_{t \to t_{\text{max}}} (t, y(t)) &= (\infty, \infty) \in \partial D \end{aligned}$$

2) Das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{t}{y}, \quad y(0) = r > 0, \quad D = \mathbb{R} \times (0, \infty)$$

besitzt die Lösung $y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}$. Dabei ist $t_{\mathsf{min}} = -r$, $t_{\mathsf{max}} = r$ und

$$\lim_{t \to t_{\mathsf{min}}} (t, y(t)) = (-r, 0) \in \partial D$$

3) Für das Anfangswertproblem

$$y' = y^2, \quad y(0) = 0, \quad D = \mathbb{R}^2$$

erhält man mittels Trennung der Variablen die Lösung

$$y(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad -\infty = t_{\mathsf{min}} < t < t_{\mathsf{max}} = 1$$

Satz: (Picard, Lindelöf)

Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sei stetig auf dem Quader

$$Q := \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;:\; |t - t_0| \leq a \,\wedge\, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|_\infty \leq b\}$$

Ferner gelte mit Konstanten $M, L > 0$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq M \qquad \forall\, (t, \mathbf{y}) \in Q \\ \|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| &\leq L\|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\| \quad \forall\, (t, \hat{\mathbf{y}}), (t, \mathbf{y}) \in Q \end{aligned}$$

(Lipschitz–Bedingung)

Dann besitzt das Anfangswertproblem $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)),\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t)$, die mindestens im Intervall $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ mit

$$\varepsilon := \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$$

definiert ist.

Beweis: Durch Integration der Differentialgleichung folgt

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau))\, d\tau$$

Lösung dieser Fixpunktgleichung mit Hilfe einer **Fixpunktiteration**:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{(0)}(t) &= \mathbf{y}_0(t) \\
\mathbf{y}^{(k+1)}(t) &= \mathbf{y}^{(k)}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}^{(k)}(\tau)) d\tau
\end{aligned}$$

Die Iteration liefert in jedem Schritt eine genauere Näherungslösung:

Verfahren der sukzessiven Approximation

Beweis läuft damit analog zum Beweis des Fixpunktsatzes (Analysis II)

Bemerkung:

1) Erfüllt die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}^n$ die Lipschitz–Bedingung

$$\|\mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L \|\hat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}\|,$$

so besitzt das Anfangswertproblem mit $t_0 \in [t_1, t_2]$ eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $[t_1, t_2]$ erklärt ist. Man nennt dies **Globale Existenz**.

2) Ein lineares Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(n,n)}$, $\mathbf{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.

3) Ist $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf dem Quader Q eine $\mathcal{C}^1$–Funktion, so erfüllt $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ dort die Lipschitz–Bedingung.

Beispiel: (Verfahren der sukzessiven Approximation)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1$$

Dann gilt mit $y^{(0)}(t) = 1$:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= y^{(0)}(t) + \int_0^t y^{(0)}(t) d\tau = 1 + t \\ &\Rightarrow \quad \text{(Beweis durch Induktion)} \\ y^{(k)}(t) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} t^j \end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ folgt demnach

$$y(t) = \lim_{k \to \infty} y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j = \exp(t)$$

2.2 Abhängigkeit von Parametern, Stabilität

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$$

wobei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar sei.

Dann existiert für $(t_0, \mathbf{y}_0) \in D$ eine eindeutig bestimmte lokale Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, wobei wir die Lösung in D maximal fortsetzen.

Frage:

Was passiert mit dieser Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, wenn man den Startwert $(t_0, \mathbf{y}_0)$ ein wenig verschiebt?

Satz: (Lemma von Gronwall)

Gilt für eine auf $|t - t_0| \leq \varepsilon$ stetige Funktion $r(t)$ eine Abschätzung der Form:

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0,\, \beta > 0$$

so folgt für alle $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Beziehung:

$$r(t) \leq \alpha\, e^{\beta |t - t_0|}$$

Beweis: Wir definieren für $t \geq t_0$

$$u(t) := e^{-\beta t} \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau$$

Damit ergibt sich für die Ableitung von $u(t)$ die Beziehung:

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t)$$

Aus der Voraussetzung

$$r(t) \leq \alpha + \beta \int_{t_0}^{t} r(\tau) d\tau, \quad \alpha \geq 0,\, \beta > 0$$

erhalten wir unter Verwendung der Definition von $u(t)$ gerade

$$e^{-\beta t} r(t) \leq e^{-\beta t}\alpha + \beta u(t)$$

und daher folgt

$$u'(t) = -\beta u(t) + e^{-\beta t} r(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

Wir schreiben diese Ungleichung als

$$\alpha e^{-\beta t} - u'(t) \geq 0$$

und integrieren von t_0 bis t.

Integration von

$$u'(t) \leq \alpha e^{-\beta t}$$

über $[t_0, t]$ ergibt mit $u(t_0) = 0$

$$u(t) \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}\right)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} r(t) &\leq \alpha + \beta e^{-\beta t} u(t) \\ &\leq \alpha + \alpha e^{\beta t}\left(e^{-\beta t_0} - e^{-\beta t}\right) \\ &= \alpha e^{\beta(t-t_0)} \end{aligned}$$

Dies ergibt für $t \geq t_0$ die gewünschte Abschätzung.

Für $t < t_0$ folgt die Aussage des Satzes aus der Transformation durch Spiegelung, d.h.

$$\tilde{r}(t) := r(2t_0 - t)$$

Satz: Für Anfangswerte $\mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ seien die Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ und $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)$ auf dem Intervall $|t - t_0| \leq \varepsilon$ definiert.

Die Konstante $L > 0$ sei eine Lipschitz–Konstante der rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Quader $Q = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \tilde{Q}$.

Dann gilt für $|t - t_0| \leq \varepsilon$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\|$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem Lemma von Gronwall.

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0)) d\tau$$

Mittels Dreiecksungleichung erhalten wir damit:

$$\underbrace{\|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{z}_0)\|}_{r(t)} \leq \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{z}_0\| + L \cdot \int_{t_0}^{t} \|\mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}(\tau; t_0, \mathbf{z}_0)\| d\tau$$

Bemerkung:

1) Der Satz besagt, dass die Lösung eines Anfangswertproblem Lipschitz-stetig von den Anfangswerten $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ abhängt.

2) Für eine lineare DGL

$$y'(t) = Ly(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad L > 0$$

gilt in der obigen Abschätzung für $t \geq t_0$ **Gleichheit**:

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0|$$

Für $t < t_0$ wird der Fehler allerdings erheblich überschätzt:

$$|y(t; t_0, y_0) - y(t; t_0, z_0)| = e^{L(t-t_0)} \cdot |y_0 - z_0| \to 0$$

für $t \to -\infty$.

Verallgemeinerung:

Sind $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$, $\mathbf{g}(t,\mathbf{y})$ stetig differenzierbar auf einem Quader mit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}-\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\| &\leq \delta \\ \|\mathbf{g}(t,\mathbf{y})\| &\leq M \\ \|\mathbf{f}(t,\mathbf{y})-\mathbf{f}(t,\tilde{\mathbf{y}})\| &\leq L\|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{y}}\| \end{aligned}$$

so gilt für die beiden Lösung $\mathbf{y}(t)$ und $\mathbf{z}(t)$ der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0)=\mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{g}(t,\mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{z}(t_1)=\mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(t)-\mathbf{z}(t)\| &\leq \|\mathbf{y}_0-\mathbf{z}_0\|\, e^{L|t-t_0|} + M\,|t_1-t_0|\, e^{L|t-t_0|} \\ &\quad + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|t-t_0|}-1\right) \end{aligned}$$

Eine Anwendung: **Parameterabhängige Anfangswertprobleme**

Wir betrachten dazu das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \lambda), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$$

d.h. die rechte Seite hängt von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ab.

Diese Problem lässt sich einfach auf den letzten Fall zurückführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}'(t) &= 0, \quad \mathbf{z}(t_0) = \lambda \end{aligned}$$

Setzen wir $\mathbf{w}(t) = (\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t))^T$, so gilt mit

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{w}(t)) = (\mathbf{f}(t, \mathbf{w}(t)), 0)^T$$

und $\mathbf{w}_0 = (\mathbf{y}_0, \lambda)^T$, $\tilde{\mathbf{w}}_0 = (\mathbf{y}_0, \tilde{\lambda})^T$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{w}(t; t_0, \mathbf{w}_0) - \mathbf{w}(t; t_0, \tilde{\mathbf{w}}_0)\| \leq e^{L|t-t_0|} \cdot |\lambda - \tilde{\lambda}|$$

Frage: Kann man die beiden Größen

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}(t) &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0}\mathbf{y}(t;t_0,\mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}\\ \mathbf{w}(t) &:= \frac{\partial}{\partial t_0}\mathbf{y}(t;t_0,\mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n}\end{aligned}$$

exakt berechnen?

Satz: Die rechte Seite $\mathbf{f}(t,\mathbf{y})$ sei eine $\mathcal{C}^1$–Funktion auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{\mathbf{y}}(t)$ sei eine auf einem kompakten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ erklärte Lösung der Differentialgleichung $\mathbf{y}' = f(t,\mathbf{y})$.

1) Es gibt einen Streifen um $\bar{\mathbf{y}}(t)$

$$S_\alpha := \left\{(t,\mathbf{y})^T \ : \ t \in I \ \wedge \ \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(t)\| \le \alpha\right\} \subset D, \quad \alpha > 0$$

so dass die Lösung $\mathbf{y}(t;t_0\mathbf{y}_0)$ des Anfangswertproblems für alle $(t_0,\mathbf{y}_0) \in S_\alpha$ auf ganz I erklärt ist.

Satz: (Fortsetzung)

2) Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ist auf $I \times S_\alpha$ eine $\mathcal{C}^1$–Funktion bezüglich **aller** Variablen.

3) Die so genannten Variationen

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(t) &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \mathbf{w}(t) &:= \frac{\partial}{\partial t_0} \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n} \end{aligned}$$

sind die Lösungen der linearen Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}'(t) &= \mathbf{f}_\mathbf{y}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{w}'(t) &= \mathbf{f}_\mathbf{y}(t, \mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)) \cdot \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = -\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) \end{aligned}$$

Kapitel 3: Lineare Differentialgleichungen

3.1 Systeme erster Ordnung

Explizites lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \tag{1}$$

wobei $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen in t sind.

Das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangswerten $(t_0, \mathbf{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Satz: Die allgemeine Lösung der DGL (1) ist gegeben durch

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_p(t) + \mathbf{y}_h(t)$$

wobei $\mathbf{y}_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen, $\mathbf{y}_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Die homogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Die Lösung $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$ ist ein Element des **Vektorraums** $\mathbb{R}^n$.

Basisdarstellung:

Sei $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t)\mathbf{v}^k$$

mit der Anfangsbedingung:

$$\mathbf{y}_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha(0)\mathbf{v}^k$$

Idee:

Betrachte die folgenden n Anfangswertprobleme ($k = 1, \dots, n$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{v}^k \end{aligned}$$

Definiere die **Fundamentalmatrix** bzw. das **Fundamentalsystem**

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \dots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Satz: Die Matrix $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei ein (beliebiges) Fundamentalsystem. Dann gilt:

1) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t), \qquad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

2) Die Fundamentalmatrix ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär.

Beweis:

Da $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis bilden, ist die Matrix $\mathbf{Y}(t_0)$ regulär, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}^1(t_0), \ldots, \mathbf{y}^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$$

Weiter gilt für

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t)$$

offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{A}(t)\mathbf{y}^k(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t)\right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{y}(t)$ eine Lösung.

Beweis: (Fortsetzung)

Sei nun $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dann setzen wir

$$\mathbf{c}^* := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\mathbf{y}^*(t_0)$$

Dann sind $\mathbf{y}^*(t)$ und $\mathbf{y}(t) := \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$ beide Lösungen des Anfangswert-problems

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^*(t_0$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt $\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{y}(t)$. Also gilt

$$\mathbf{y}^*(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}^*$$

Damit ist Teil 1) gezeigt.

Beweis: (Fortsetzung)

Teil 2) des Satzes besagt, dass $\mathbf{Y}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär ist:
Sei dazu $t_1 \neq t_0$ fest. Wir zeigen dann folgende Aussage:

$$\forall\, \mathbf{y}^1 \in \mathbb{R}^n \;\exists\, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n \;:\; \mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$$

denn dann ist $\mathbf{Y}(t_1)$ regulär.
Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(t_1) = \mathbf{y}^1$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}$$

mit einem geeigneten $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann.
Für $t = t_1$ gilt dann:

$$\mathbf{Y}(t_1)\,\mathbf{c} = \mathbf{y}^1$$

Wronski–Determinante

Die $\mathcal{C}^1$–Funktion

$$W(t) = \det\left(\mathbf{Y}(t)\right)$$

nennt man die Wronski–Determinante der linearen Differentialgleichung zum Fundamentalsystems $\mathbf{Y}(t)$.

Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer (skalaren) linearen DGL, es gilt nämlich:

$$W'(t) = \mathrm{Spur}\left(\mathbf{A}(t)\right) \cdot W(t)$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int\limits_{t_0}^{t} \mathrm{Spur}\left(\mathbf{A}(\tau)\right) d\tau \right)$$

Die inhomogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie im skalaren Fall die **Variation der Konstanten**:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$$

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \end{aligned}$$

Die Funktion $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t)$ löst die inhomogene Gleichung, falls:

$$\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) = \mathbf{h}(t)$$

Da $\mathbf{Y}(t)$ regulär ist, können wir dies auch in der Form

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{Y}^{-1}(t)\,\mathbf{h}(t)$$

schreiben. Durch Integration erhält man

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau)\,d\tau$$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \left(\mathbf{c}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{Y}^{-1}(\tau)\,\mathbf{h}(\tau) \right)$$

Mit $\mathbf{c}_0 := \mathbf{Y}(t_0)^{-1}\,\mathbf{y}_0,$ gilt $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$.

Das Reduktionsverfahren:

Annahme: Es sei eine Lösung $\mathbf{y}^n(t)$ des gegebenen Systems bekannt.

Idee: Setze $\mathbf{y}^n(t)$ als letzte Spalte einer Fundamentalmatrix und reduziere damit die Dimension.

Ansatz: Suche neue Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = w_n(t)\mathbf{y}^n(t) + \mathbf{z}(t), \quad w_n(t) \in \mathbb{R}$$

wobei wir annehmen, dass $y_n^n(t) \neq 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= w_n'\mathbf{y}^n + w_n\frac{d}{dt}\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\
&= w_n'\mathbf{y}^n + w_n\mathbf{A}\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\
&= \mathbf{A}\left(w_n\mathbf{y}^n + \mathbf{z}\right) - \mathbf{A}\mathbf{z} + w_n'\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\
&= \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{z}' - \mathbf{A}\mathbf{z} + w_n'\mathbf{y}^n
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w_n' \mathbf{y}^n$$

d.h. unser Ansatz für $\mathbf{y}(t)$ ist eine Lösung, falls $\mathbf{z}(t)$ eine Lösung des linearen, inhomogenen Systems

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w_n' \mathbf{y}^n$$

ist.

Die komponentenweise Darstellung dieses Systems lautet

$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k - w_n' y_i^n, \quad i = 1, \ldots, n$$

Wir haben noch die Freiheit $w_n(t)$ zu wählen: DGL für $z_n(t)$ ist

$$\begin{aligned} z_n' &= a_{n1} z_1 + \ldots + a_{nn} z_n - w_n' y_n^n \\ &= a_{nn} z_n - w_n' y_n^n + a_{n1} z_1 + \ldots + a_{n,n-1} z_{n-1} \end{aligned}$$

Wir setzen

$$w_n' = \frac{1}{y_n^n}\left(a_{n1}z_1 + \ldots + a_{n,n-1}z_{n-1}\right)$$

Dann löst $z_n(t)$ die lineare, homogene Gleichung $z_n' = a_{nn}z_n$ und wir können die einfachste Lösung dieser Gleichung wählen, nämlich

$$z_n(t) = 0$$

Damit erhalten wir für $z_1, \ldots, z_{n-1}$ das reduzierte System:

$$\begin{aligned} z_i' &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}z_k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}z_k\right)\frac{y_i^n}{y_n^n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{ik} - a_{nk}\frac{y_i^n}{y_n^n}\right) z_k \\ &=: \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik}z_k \end{aligned}$$

Reduktionsverfahren:

1) Man setze:

$$b_{ik} := a_{ik} - a_{nk}\frac{y_i^n}{y_n^n}, \quad i,k = 1,\ldots,n-1$$

2) Man bestimme die (allgemeine) Lösung des Systems

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{B}(t)\cdot\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t)\in\mathbb{R}^{n-1}$$

3) Zu jeder Lösung $\mathbf{z}(t) \neq 0$ ist dann

$$\mathbf{y}(t) \;:=\; w_n(t)\mathbf{y}^n(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit}$$

$$w_n(t) \;:=\; \int_{t_0}^{t} \left(\frac{1}{y_n^n(\tau)}\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(\tau)z_k(\tau)\right)\, d\tau$$

eine von $\mathbf{y}^n(t)$ linear unabhängige Lösung.

Bespiel: Der Vektor $\mathbf{y}^2(t) = (t,1)^T$ ist eine Lösung von

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Reduktionsverfahrens:

$$b_{11} = a_{11} - a_{21}\frac{y_1}{y_2} = 0 - (-1)\frac{t}{1} = t$$

Daraus folgt die Gleichung $z' = tz$ mit der Lösung $z(t) = e^{t^2/2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{t_0}^{t} a_{21}\frac{z}{y_2}d\tau = -\int_{t_0}^{t} e^{\tau^2/2}d\tau \\ \mathbf{y}^1(t) &= w(t)\cdot\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fundamentalsystem: $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2(t))$.

3.2 Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Fundamentalsysteme können explizit berechnet werden, falls

$$A(t) = A = \text{konst.}$$

gilt, d.h. die Matrix ist unabhängig von t (**Konstante Koeffizienten**).

Ansatz: Suche eine Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}, \quad \lambda \in \mathbb{C},\ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt:

$$\mathbf{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{y}$$

Dies bedeutet:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

d.h. $\mathbf{y}(t)$ ist eine Lösung, falls

$\mathbf{v}$ ein **Eigenvektor** von $\mathbf{A}$ zum **Eigenwert** λ ist.

Wiederholung: Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ von

$$\mathbf{y}'(t) = A(t)\,\mathbf{y}(t)$$

ist gegeben durch die n Anfangswertaufgaben

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{v}^k \end{aligned}$$

mit den Basisvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ und

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Konstante Koeffizienten: Eigenvektor $\mathbf{v}$ zum Eigenwert λ

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{y}(t), \qquad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{v}$$

besitzt die Lösung

$$\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$$

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$.

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Beispiel: (Vorbereitung auf Fall 2)

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: (Fortsetzung: Vorbereitung auf Fall 2)

Die Eigenwerte und –vektoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + 2i, \qquad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 1 - 2i, \qquad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es existiert also eine Basis aus Eigenvektoren, aber für $\mathbb{C}^2$, d.h. die Eigenvektoren (und Eigenwerte) sind komplexwertig.

Wir suchen aber **reellwertige** Lösungen!

Die komplexen Eigenvektoren bilden ein **komplexes** Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2)$$

Fall 2: Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist **diagonalisierbar**

Dann existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem (für $\mathbb{C}^n$) ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\,\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\,\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine, **komplexwertige** Lösung des homogenen Systems mit konstanten **reellen** Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Bemerkung: Jede **normale** und damit jede **symmetrische** Matrix ist diagonalisierbar (Lineare Algebra).
Normale Matrix bedeutet, dass $\bar{A}^T A = A\,\bar{A}^T$ gilt.

Frage: Ist es möglich, ein reelles Fundamentalsystem anzugeben?

Lineare Algebra:

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist auch $\bar{\lambda}$ (konjugiert–komplex) ein Eigenwert.
Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist.

Also: Nichtreelle Eigenwerte und –vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v} \\ \mathbf{y}^2(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \text{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \text{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \end{aligned}$$

Beispiel: Ein komplexes Fundamentalsystem zu

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

lautet

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}^2)$$

mit

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \qquad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 - 2i, \qquad \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

Die beiden Eigenwerte treten paarweise auf:

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \qquad \mathbf{v}^2 = \bar{\mathbf{v}}^1$$

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \text{Re}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \text{Im}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine, **reelle** Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ 2c_1\sin(2t) - 2c_2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Fall 3: Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist **nicht** diagonalisierbar

Hier benötigt man die **Jordansche Normalform** einer Matrix:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} \\ \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{J}_i$ ein Jordan–Kästchen bezeichnet, d.h.

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

mit dem Eigenwert λ_i.

Wieso ist im Fall 3 die Jordansche Normalform wichtig?

Ein System der Form

$$\text{(2)} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix}$$

kann explizit gelöst werden.

Ein Fundamentalsystem für (2) ist gegeben durch

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^2/2! \\ t/1! \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} t^{r-1}/(r-1)! \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ t/1! \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dieses System entsteht mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$.

Jordansche Normalform

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Transformationsmatrix S besteht aus Eigen– und Hauptvektoren

$$\mathbf{S} = (\mathbf{v}^{11}, \ldots, \mathbf{v}^{1r_1} \,|\, \mathbf{v}^{21}, \ldots, \mathbf{v}^{2r_2} \,|\, \ldots \,|\, \mathbf{v}^{m1}, \ldots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

$\mathbf{v}^{j1}$: Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, $j = 1, \ldots, m$

$\mathbf{v}^{jk}$: Hauptvektor der Stufe $(k-1)$, $k = 2, \ldots, r_j$

$$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1}, k = 2, \ldots, r_j$$

Wir setzen nun $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(t) &= \mathbf{S}^{-1}\,\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\mathbf{z}(t) \\ &\Rightarrow \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{z}(t) \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem für $\mathbf{z}' = \mathbf{J}\,\mathbf{z}$ haben wir bereits berechnet.

Rücktransformation ergibt ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

Für ein einzelnes Jordan–Kästchen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{11} \\
\mathbf{y}^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12}\right) \\
&\;\vdots \\
\mathbf{y}^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\,\mathbf{v}^{11} + \ldots + \frac{t}{1!}\,\mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r}\right)
\end{aligned}$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:

1) Bestimmung der Eigenwerte, Eigen– und Hauptvektoren,
2) Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
3) Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ lautet:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = (1-\lambda)^3$$

Der Wert $\lambda = 1$ ist also ein dreifacher Eigenwert.

Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da $\operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3) = 2$ gilt, ist die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = 1$.

Hauptvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^2(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 16t \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^3(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 8t^2 \\ -4t+1 \\ 8t+2 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Wieder ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert von $\mathbf{A}$, aber es gilt $g(\lambda) = 2$.

Es existieren also **zwei** linear unabhängige Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)^2 = \mathbf{0}$$

Wir suchen daher einen zu $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$ linear unabhängigen Vektor $\mathbf{v}^{22}$ (Hauptvektor der Stufe 1).

Wähle etwa $\mathbf{v}^{22} = (0, 0, 1)^T$. Dann gilt

$$\mathbf{v}^{21} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_3)\mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir folgende System von Eigen– und Hauptvektoren:

$$\mathbf{v}^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}^{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}^{22} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zugehöriges Fundamentalsystem:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}^3(t) = e^t \begin{pmatrix} t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrizen:

Es gilt:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Jordansche Normalform ist:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine skalare, lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung:

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei $a_k(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ seien.

Gleichungen dieser Bauart lassen sich stets als lineare Differentialgleichungssysteme

$$\text{(3)} \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

mit

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots .n$$

schreiben.

Die homogene Differentialgleichung

Definition Ein Funktionensystem $(y_1(t), \ldots, y_n(t))$ heißt ein **Fundamentalsystem** der Differentialgleichung $L[y] = h$, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) Die Funktion $y_k(t)$ löst die homogene Gleichung, d.h.

$$L[y_k] = 0, \quad k = 1, \ldots, n$$

2) Für die **Wronski–Determinante**

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

gilt: $W(t_0) \neq 0$ für mindestens ein $t_0 \in \mathbb{R}$.

Bemerkung:

1) Ist $W(t_0) \neq 0$, so gilt auch für alle $t \in \mathbb{R}$: $\quad W(t) \neq 0$

2) Die Funktion $W(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t)$$

und daher folgt direkt

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)d\tau\right)$$

Sei $\mathbf{C}(t)$ die zugehörige Koeffizientenmatrix wie in (3). Dann gilt

$$\det \mathbf{C}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}(t) = -a_{n-1}(t)$$

Bemerkung: (Fortsetzung)

3) Ein Fundamentalsystem $(y_1, \ldots, y_n)$ läßt sich durch Lösung der folgenden n Anfangswertaufgaben $(k = 1, \ldots, n)$ bestimmen:

$$
\begin{aligned}
L[y_k] &= 0 \\
y_k^{(i)}(t) &= \begin{cases} 0 & : \ i \neq k-1 \\ 1 & : \ i = k-1 \end{cases} \qquad (i = 0, \ldots, n-1)
\end{aligned}
$$

4) Ist $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \, y_k(t)$$

wobei $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Das Reduktionsverfahren

Sei $u(t) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$.

Produktansatz:

Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung in der Form

$$y(t) = u(t) \cdot z(t)$$

Die ersten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t)z(t) + u(t)z'(t) \\ y''(t) &= u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t) \end{aligned}$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

Einsetzen in $L[y] = 0$ ergibt:

$$L[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

$$= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{k}{0} u^{(k)}(t)\right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j\, z^{(j)}(t)$$

Setzt man $w(t) := z'(t)$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j\, w^{(j)}(t) = 0$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung der Ordnung $n-1$.

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=1}^{n-1} b_j \, w^{(j)}(t) = 0$$

so setzen wir

$$z_k(t) = \int_{t_0}^{t} w_k(\tau) d\tau, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, z_1 \cdot u, \ldots, z_{n-1} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem das Ausgangsgleichung, also $L[y] = 0$ mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t) y(t) = 0$$

Beispiel:

Die Differentialgleichung $y'' + ty' + y = 0$ besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Unser Ansatz $y = u \cdot z$ liefert:

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot z + u \cdot z' \\ y'' &= u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z'' \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} y'' + ty' + y &= u''z + 2u'z' + uz'' + t(u'z + uz') + uz \\ &= 2u'z' + uz'' + tuz' \end{aligned}$$

Wir setzen $w = z'$ und erhalten für w die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u}\,w$$

Wir berechnen:

$$\frac{2u' + tu}{u} = \frac{-2te^{-t^2/2} + te^{-t^2/2}}{e^{-t^2/2}} \quad \Rightarrow \quad w' = tw$$

Damit gilt:

$$w(t) = e^{t^2/2} \quad \Rightarrow \quad z(t) = \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Wir erhalten damit das Fundamentalsystem

$$y_1(t) = u(t) = e^{-t^2/2} \qquad y_2(t) = e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(t) = c_1 e^{-t^2/2} + c_2 e^{-t^2/2} \int_0^t e^{\tau^2/2} d\tau$$

Die inhomogene Differentialgleichung

Ist das Funktionensystem $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \cdots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung.

Die Methode der Variation der Konstanten ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \cdots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Die Methode der Greenschen Funktion/Grundlösungsverfahren

Gegeben sei die inhomogene Gleichung n–ter Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = h(t)$$

Satz:

Sei $w(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : \quad k = 0, \ldots, n-2 \\ 1 & : \quad k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)h(\tau)d\tau \\ G(t,\tau) &= w(t - \tau + t_0) \end{aligned}$$

Lineare Gleichungen n–ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei die homogenen Gleichung $L[y] = 0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ und $a_n = 1$.

Ansatz zur Berechnung eines Fundamentalsystems:

$$y(t) = e^{\lambda t} \tag{4}$$

Daraus folgt

$$L[y] = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \right) e^{\lambda t}$$

Der Ansatz (4) liefert also eine Lösung, falls λ eine Nullstelle der so genannten **charakteristischen Gleichung**

$$p(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k = 0$$

ist.

Satz:

1) Ist λ_k eine r_k–fache **reelle** Nullstelle von $p(\lambda)$, so existieren die folgenden Lösungen der homogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y_{k1}(t) &= e^{\lambda_k t} \\ y_{k2}(t) &= t \cdot e^{\lambda_k t} \\ &\vdots \\ y_{k,r_k}(t) &= t^{r_k - 1} \cdot e^{\lambda_k t} \end{aligned}$$

2) Ist λ_k eine r_k–fache **komplexe** Nullstelle, $\lambda_k \notin \mathbb{R}$, so sind die reellen Lösungen mit $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ gegeben durch

$$y_{kj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \cos(\beta_k t) \qquad y_{lj}(t) = t^{j-1} e^{\alpha_k t} \sin(\beta_k t)$$

und $j = 1, \ldots, r_k$.

3) Die nach 1) und 2) gebildeten Lösungen bilden ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Beispiel:

1) Gegeben sei die homogene Gleichung vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet dann:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

und besitzt die Nullstellen $\lambda_{1,2} = i$, $\lambda_{3,4} = -i$.
Ein Fundamentalsystem ist daher

$$\begin{array}{rclcrcl} y_1(t) & = & \cos t & \qquad & y_3(t) & = & t \cdot \cos t \\ y_2(t) & = & \sin t & & y_4(t) & = & t \cdot \sin t \end{array}$$

2) Die homogenen Gleichung $y'' - 2y' + y = 0$ besitzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$.
Die allgemeine Lösung ist daher

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

Beispiel: Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

Variation der Konstanten verwendet den Ansatz:

$$y_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t$$

Gelöst werden muss dann das DGL–System

$$\begin{aligned} c_1' e^t + c_2' t e^t &= 0 \\ c_1' e^t + c_2'(1+t)e^t &= \frac{e^t}{t^2} \end{aligned}$$

Man berechnet direkt:

$$c_1(t) = -\ln|t| \qquad c_2 = -\frac{1}{t}$$

und eine spezielle Lösung ist daher

$$y_p(t) = -(\ln|t| + 1)e^t$$

Beispiel: Wir betrachten wieder die inhomogene Gleichung

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2}$$

und verwenden die Methode der Greenschen Funktion:
Die Lösung von

$$w'' - 2w' + w = 0, \quad w(1) = 0, \quad w'(1) = 1$$

ist gegeben durch $w(t) = (t-1)e^{t-1}$. Also gilt für die Greensche Funktion

$$G(t, \tau) = w(t - \tau + 1) = (t - \tau)e^{t-\tau}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \int_1^t (t-\tau)e^{t-\tau}\frac{e^\tau}{\tau^2}d\tau \\ &= e^t(-1 + t - \ln|t|) \end{aligned}$$

Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von $y_p(t)$ verwenden:

1) Ist μ keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung $p(\lambda)$:

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

mit den freien Parametern γ_j

2) Ist μ eine r–fache Nullstelle von $p(\lambda)$:

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

Beispiel: Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - y = te^t$$

Die charakteristische Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ und $\mu = 1$ ist eine **einfache** Nullstelle.

Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren:

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$ und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t-1)e^t$$

Das Superpositionsprinzip

Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

$$L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t) \tag{5}$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y] = h_1(t)$ und $L[y] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (5).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$h(t) = \mathrm{Re}\,(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \mathrm{Im}\,(w(t))$$

und ist $z(t)$ eine (komplexe) Lösung von $L[z] = w$, so ist

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \mathrm{Im}\,(z(t))$$

eine (reelle) Lösung von der DGL $L[y] = h(t)$.

Beispiel:

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos t + \sin(2t))$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{4}t\cos(2t)\right)$$

1) Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\cos t \\ y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\sin(2t) \end{aligned}$$

2) Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned} z'' + 2z' + 5z &= e^{(-1+i)t} \\ z'' + 2z' + 5z &= e^{(-1+2i)t} \end{aligned}$$

3.4 Die Laplace–Transformation

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine reell– oder komplexwertige Funktion auf $\mathbb{R}$. Unter der **Laplace–Transformierten** von F versteht man die Integraltransformation

(6) $$f(s) := \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$$

wobei $s \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl ist.

Frage: Für welche Funktionen $F(t)$ existiert das uneigentliche Integral?

Schreiben wir die komplexe Zahl s als

$$s = \sigma + i\omega$$

so folgt

$$f(s) := \int_0^\infty e^{-\sigma t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) F(t) dt$$

Wachstumsverhalten von $F(t)$ ist entscheidend:

Satz: Ist F auf $[0, \infty)$ lokal integrierbar und erfüllt F eine Ungleichung der Form

$$|F(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

mit gewissen Konstanten M und σ_0, so existiert die Laplace–Transformierte für alle $s \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

Beweisidee: Setzen wir $s = \sigma + i\omega$, so gilt

$$|e^{-st}F(t)| = e^{-\sigma t}|F(t)| \leq M e^{-(\sigma - \sigma_0)t}$$

Aus $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$, folgt also

$$(\sigma - \sigma_0)t > 0 \qquad \forall\, t > 0$$

und damit die Konvergenz des uneigentlichen Integrals auf der rechten Seite von (6).

Notationen und Bezeichnungen:

Sei $F(t)$ eine reell– oder komplexwertige Funktion, für die die Laplace–Transformierte $f(s)$ existiert.

1) Wir schreiben auch: $f = \mathcal{L}[F]$

2) Das **Doetsch–Symbol** lautet $\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$:

$$F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f \quad \text{oder} \quad f \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ F$$

3) Eine Beziehung

$$f = \mathcal{L}[F] \quad \text{bzw.} \quad F \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet f$$

nennt man eine **Korrespondenz**, die Zuordnung $F \rightarrow f$ heisst **Laplace–Transformation**.

4) Die Laplace–Transformation ist **linear**, d.h.

$$\mathcal{L}[\alpha F + \beta G] = \alpha \mathcal{L}[F] + \beta \mathcal{L}[G]$$

Beispiele:

1) Wir betrachten die **Heaviside–Funktion**

$$H(t) := \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 & : \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Die Laplace–Transformierte lautet demnach

$$f(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \, dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$$

und existiert für $\text{Re}(s) > 0$.

Dies liefert die Korrespondenz

$$1 \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$$

Beispiele: (Fortsetzung)

2) Die Laplace–Transformierte von $F(t) = t^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist gegeben durch

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt$$

Das Integral existiert für $\mathrm{Re}(s) > 0$ und mittels partieller Integration findet man

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^n dt = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-st}\, t^{n-1} dt$$

Wiederholte Anwendung ergibt die Korrespondenz

$$t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Beispiele: (Fortsetzung)

3) Gegeben sei die komplexe Funktion $F(t) = e^{at}$ mit $a = \alpha + i\beta$:

$$\begin{aligned} f(s) &= \int_0^\infty e^{-st}\, e^{at} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt \\ &= -\frac{1}{s-a}\, e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-a} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > \alpha \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Korrespondenz

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

Beispiele: (Fortsetzung)

4) Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \sin(\omega_0 t) \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$$

Beispiele: (Fortsetzung)

5) Wir betrachten die Funktion

$$F(t) = \cos(\omega_0 t) \qquad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

Es gilt

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)$$

Wegen

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}$$

erhalten wir die Korrespondenz

$$\cos(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

Korrespondenztabelle:

$F(t)$	$f(s)$	σ_0	Bemerkung
1	$\frac{1}{s}$	0	
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0	$n = 1, 2, \ldots$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	Re(a)	a komplex
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	0	ω_0 reell

Grundregeln der Laplace–Transformation

1) **Additionssatz**
   Für beliebige komplexe Konstanten a und b gilt:

$$aF(t) + bG(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ af(s) + bg(s)$$

2) **Ähnlichkeitssatz**
   Für jede reelle Konstante $\alpha > 0$ gitl:

$$F(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

Beispiel: Aus

$$e^t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-1}$$

folgt

$$e^{\alpha t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\frac{s}{\alpha} - 1} = \frac{1}{s - \alpha}$$

Grundregeln der Laplace–Transformation

3) **Differentiationssatz**

F sei für $t > 0$ differenzierbar und es existiere die Laplace–Transformierte von F'. Dann gilt

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Besitzt F im Ursprung eine Unstetigkeitsstelle, so bedeutet $F(0)$ den linksseitigen Grenzwert

$$F(0) := \lim_{t \searrow 0} F(t)$$

Allgemein gilt für höhere Ableitungen ($n \geq 2$) die Formel:

$$F^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \ldots - F^{(n-1)}(0)$$

Grundregeln der Laplace–Transformation

4) **Multiplikationssatz**

Es gilt

$$-tF(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; f'(s)$$

beziehungsweise

$$tF(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; -f'(s)$$

Allgemeine Formel:

$$(-t)^n F(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; f^{(n)}(s)$$

beziehungsweise

$$t^n F(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; (-1)^n f^{(n)}(s)$$

Grundregeln der Laplace–Transformation

5) **Integrationssatz**
Es gilt:

$$\int_0^t F(\tau)d\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{f(s)}{s}$$

6) **Divisionssatz**
Die Funktion besitze den Wachstumskoeffizienten σ_0, und es existiere die Laplace–Transformierte von

$$G(t) := \frac{F(t)}{t}$$

Dann gilt für Re$(s) > \sigma_0$:

$$G(t) = \frac{F(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \int_s^\infty f(u)du$$

Grundregeln der Laplace–Transformation

7) **Verschiebungssatz**
   Für alle $T_0 > 0$ gilt:

$$F(t - T_0) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; e^{-sT_0} f(s)$$

8) **Dämpfungssatz**
   Für ein beliebiges komplexes a gilt:

$$e^{at} F(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; f(s - a)$$

Beispiel:
Aus

$$\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

folgt

$$e^{at} \sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega_0}{(s - a)^2 + \omega_0^2}$$

Laplace–Transformation und gewöhnliche Differentialgleichungen

Nach dem Differentiationssatz gilt:

$$F'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; sf(s) - F(0)$$

Idee: Gegeben sei das Anfangswertproblem

(7) $$Y'(t) = Y(t), \qquad Y(0) = 1$$

Sei $y(s)$ die Laplace–Transformierte von $Y(t)$. Dann folgt aus (7):

$$sy(s) - 1 = y(s) \quad \Rightarrow \quad y(s) = \frac{1}{s-1}$$

Aus der Korrespondenztabelle ergibt sich daher:

$$Y(t) = e^t$$

Resultat: Lineare DGL's ergeben **algebraische Gleichungen** für die Laplace–Transformierte.

Beispiel: Wir suchen die Lösung des Anfangswertproblems $(\alpha > 0)$

$$Y''(t) + \alpha^2 Y(t) = \sin(\alpha t)$$

mit $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Nach der Korrespondenztabelle erhalten wir

$$s^2 y(s) + \alpha^2 y(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

und es gilt:

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2}$$

Mögliches weiters Vorgehen: Partialbruchzerlegung.

Hier verwenden wir

$$y(s) = \frac{\alpha}{(s^2 + \alpha^2)^2} = -\frac{1}{2s} \frac{d}{ds} \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2)}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Mit dem Multiplikationssatz

$$tF(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ -f'(s)$$

folgt:

$$-\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\ t\sin(\alpha t)$$

und mit dem Integrationssatz:

$$-\frac{d}{ds}\frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \int\limits_0^t \tau\sin(\alpha\tau)d\tau = \frac{1}{\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Die Lösung lautet demnach

$$Y(t) = \frac{2}{\alpha^2}(-\alpha t\cos(\alpha t)+\sin(\alpha t))$$

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} Y'' + Y' + 4Z &= \sin(\omega t) \\ Y' + Z' + Z &= 0 \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $Y() = -\frac{1}{3}$, $Y'(0) = 0$ und $Z(0) = 0$

Anwendung der Laplace–Transformation ergibt

$$\begin{aligned} s^2 y(s) - sY(0) - Y'(0) + sy(s) - Y(0) + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \\ sy(s) - Y(0) + sz(s) - Z(0) + z(s) &= 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen ergibt

$$\begin{aligned} s(s+1)y(s) + 4z(s) &= \frac{\omega}{s^2+\omega^2} - \frac{s+1}{3} \\ sy(s) + (s+1)z(s) &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Dies ein lineares Gleichungssystem mit der Matrix

$$A = A(s) = \begin{pmatrix} s(s+1) & 4 \\ s & s+1 \end{pmatrix}$$

Als Lösung $(y(s), z(s))^T$ erhalten wir

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{3\omega(s+1) - [(s+1)^2 - 4](s^2+\omega^2)}{3(s^2+\omega^2)s[(s+1)^2-4]} \\ z(s) &= \frac{\omega}{(s^2+\omega^2)[(s+1)^2-4]} \end{aligned}$$

Die nächsten Schritte:

1) **Partialbruchzerlegung**

2) Rücktransformation aus der **Korrespondenztabelle**

Beispiel: (Fortsetzung)

Als Lösung erhalten wir:

$$y(s) = -\frac{\omega^2-3}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) - \frac{\omega^2+5}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t)$$

$$+\frac{\omega}{2(\omega^2+1)}e^{t} - \frac{\omega}{6(\omega^2+9)}e^{-3t} - \frac{\omega+1}{3\omega}$$

$$z(s) = \frac{2\omega}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\cos(\omega t) + \frac{\omega^2+3}{(\omega^2+9)(\omega^2+1)}\sin(\omega t)$$

$$-\frac{\omega}{4(\omega^2+1)}e^{t} + \frac{\omega}{4(\omega^2+9)}e^{-3t}$$

Komplizierte Rechnungen, aber einfaches Lösungskonzept!

3.5 Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Weiter sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung.

Frage: Wie verhalten sich **benachbarte** Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel: Wir betrachten die beiden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \pm y(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$.

Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit der Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind:

$$y(t) = y_0 e^t \to \pm\infty \qquad y(t) = y_0 e^{-t} \to 0 \qquad \text{für} \quad t \to \infty$$

Definition:

1) Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **stabil** auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall\, \mathbf{y}_0 \;:\; \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \; (\forall\, t \in I)$$

Kann man δ unabhängig von t_0 wählen, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ **gleichmäßig stabil** auf I.

2) Ist die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ dort **asymptotisch stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ dort stabil ist und es zu $t_0 \geq a$ ein $\delta(t_0) > 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall\, \mathbf{y}_0 \;:\; \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0$$

Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **strikt stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Bemerkung:

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t)$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig ist $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

(8) $$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Statt der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir also auch die Stabilität der Nulllösung von (8) untersuchen.

Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \qquad a \le t < \infty$$

mit stetiger Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ bezeichne $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem.

Satz: (Stabilitätssatz I)

1) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf dem Intervall $[a, \infty)$, falls das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.

2) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$\forall\, t \ge t_0 \ge a \quad : \quad \|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \le M$$

3) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

Satz: Sei $\lambda(t)$ der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t) dt = -\infty$$

so folgt $\lim_{t \to \infty} \mathbf{y}(t) = 0$ für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$, d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist asymptotisch stabil.

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{y} \\ &\le \lambda(t)(\mathbf{y}^t\mathbf{y}) = \lambda(t) \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau) d\tau \right)$$

Satz: **(Stabilitätssatz II)**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ konstante Matrix. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

1) **strikt stabil**, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt: $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$.

2) **gleichmäßig stabil**, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \leq 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ instabil.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil.

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$, aber $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.

Beispiel: Wir betrachten das DGL–System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$.

Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

und die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Damit ist $\mathbf{y}^*$ strikt stabil.

Satz: (Kriterium von Routh und Hurwitz)

Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_n > 0$$

Dann sind äquivalent:

1) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realtiel.

2) Es gilt $a_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ferner sind alle Hauptunterdeterminanten der folgenden (n, n)–Matrix positiv:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

Dabei sei $a_k := 0$ für alle $k > n$.

Beispiel: Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die $(3,3)$–Matrix $\mathbf{H}$ auf:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminaten sind $\det \mathbf{H}_1 = |5| = 5$ sowie

$$\det \mathbf{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det \mathbf{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Stabilität bei nichtlinearen Differentialgleichungen

Wir betrachten das nichtlineare **autonome** System

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$$

wobei $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ gilt, d.h. $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des Systems.

Stabilitätsuntersuchung mittels **Linearisierung** der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0}), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{y}) &= \mathbf{o}(\|\mathbf{y}\|) \end{aligned}$$

Die Beziehung

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y})$$

ist gerade die **Taylor–Entwicklung** um den Entwicklungspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$.

Satz: **(Stabilitätssatz III)**

Unter den obigen Voraussetzungen gelten:

1) Ist für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\,\mathbf{f}(\mathbf{0})$:

$$\text{Re}(\lambda_j) < 0,$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert λ_j von $\mathbf{A}$ mit:

$$\text{Re}(\lambda_j) > 0,$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls aus das nichtlineare Problem.

Bemerkung:

Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

1) für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0,$$

2) **und** für mindestens ein Eigenwert λ_j gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0,$$

Beispiel:

Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die nichtlineare DGL

$$\ddot{\Phi} = -\frac{g}{l} \sin \Phi = -\omega^2 \sin \Phi$$

Dabei ist

Dabei ist

- $\Phi = \Phi(t)$ der Auslenkungswinkel zur Zeit t,
- l die Länge des Pendels,
- und g die Gravitationskonstante.

Mittels der Substitution

$$y_1 := \Phi \qquad y_2 = \dot{\Phi}$$

erhalten wir das DGL–System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1 \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind gerade die Nullstellen der rechten Seite, also

$$y_{1k} = k\pi, \qquad y_{2k} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Die **nichtlineare** rechte Seite des Systems ist:

$$\mathbf{f}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix}$$

Wir linearisieren um den Gleichgewichtspunkt $(y_{1k}, y_{2k}) = (k\pi, 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}(y_1, y_2) &= \underbrace{\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k})}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{J}\,\mathbf{f}(y_{1k}, y_{2k}) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\
&= \mathbf{J}\,\mathbf{f}(k\pi, 0) \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos k\pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 (-1)^k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - y_{1k} \\ y_2 - y_{2k} \end{pmatrix} + \mathbf{o}(\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^k\|)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich das linearisierte System:

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2 \\ \dot{y_2} &= -\omega^2(-1)^k(y_1 - k\pi) \end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -\omega^2(-1)^k & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega^2(-1)^k$$

Für die Eigenwerte folgt daraus:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm i\omega & : \text{ falls } k \text{ gerade} \\ \pm\omega & : \text{ falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Phasenportrait auf dem Einband von Ansorge, Oberle, Band 2!

Stabilität nichtlinearer Systeme mittels Ljapunov–Funktion

Definition:

Eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt eine **Ljapunov–Funktion** auf $\bar{K}_r(\mathbf{0}) \subset D$ für $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, falls gilt:

1)

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

2)

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \leq 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\ \|\mathbf{y}\| \leq r)$$

Gilt in 2) sogar

2')

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle < 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\ 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r)$$

so heißt $V(\mathbf{y})$ eine **strenge Ljapunov–Funktion**.

Satz: (Stabilitätssatz IV)

1) Ist $V(\mathbf{y})$ eine Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein gleichmäßig stabiler Gleichgewichtspunkt.

2) Ist $V(\mathbf{y})$ eine strenge Ljapunov–Funktion von $\mathbf{f}(\mathbf{y})$, so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt.

Beweisidee:

Man betrachtet die Zeitableitung der Funktion $V(\mathbf{y}(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(\mathbf{y}(t)) &= \text{grad}\, V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{y}'(t) \\ &= \text{grad}\, V(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{y}(t)) \\ &= \langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle \end{aligned}$$

Ist V eine (strenge) Ljapunov–Funktion, so ist $V(\mathbf{y}(t))$ (streng) monoton fallend.

Bemerkung: Gilt für eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $V(\mathbf{y})$ sowohl

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{y}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$$

als auch

$$\langle \nabla V, \mathbf{f}(\mathbf{y}) \rangle > 0 \qquad (\forall\, \mathbf{y},\, 0 < \|\mathbf{y}\| \leq r)$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein **instabiler** Gleichgewichtspunkt.

Beispiel: Wir betrachten das nichtlineare System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + y \\ \dot{y} &= -x - y^5 \end{aligned}$$

Der Nullpunkt ist ein isolierter Gleichgewichtspunkt des Systems.

Wir machen den Ansatz

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \qquad a, b > 0$$

Beispiel: (Fortsetzung)

Offensichtlich gilt:

$$V(0,0) = 0, \quad V(x,y) > 0 \qquad \text{für } (x,y) \neq (0,0)$$

Weiter berechnet man

$$\begin{aligned}
\langle \nabla V(x,y), \mathbf{f}(x,y) \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 2ax \\ 2by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -x^3 + y \\ -x - y^5 \end{pmatrix} \rangle \\
&= 2ax(-x^3 + y) + 2by(-x - y^5) \\
&= -2ax^4 + 2axy - 2bxy - 2by^6
\end{aligned}$$

Setzt man $a = b > 0$, so folgt

$$V(x,y) = -2ax^4 - 2by^6$$

d.h. V ist eine **strenge Ljapunov–Funktion** und der Nullpunkt ist ein **asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt**.

Beispiel: Beim mathematischen Pendel

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin y_1\end{aligned}$$

setzt man

$$V(y_1, y_2) := \frac{1}{2}y_2^2 + \omega^2(1 - \cos y_1)$$

Damit gilt $V(0,0) = 0$ und $V(y_1, y_2) > 0$ für $(y_1, y_2) \in \bar{K}_r(\mathbf{0})$, $r < \pi$.
Weiter berechnet man

$$\langle \nabla V, \mathbf{f} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \omega^2 \sin y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin y_1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

Also ist V ein Ljapunvox–Funktion auf $\bar{K}_r(\mathbf{0})$ und der Nullpunkt ist ein stabiler Gleichgewichtspunkt.

Allerdings ist V **keine** strenge Ljapunov–Funktion, denn der Urspung ist auch **nicht** asymptotisch stabil.

Kapitel 4: Randwertaufgaben

4.1 Allgemeines

Wir betrachten ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

Dabei sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hinreichend oft stetig differenzierbar.

Anfangswertproblem: Gebe Lösung zur Zeit $t = a$ vor

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0$$

Randwertproblem:

Zur Festlegung einer Lösung $\mathbf{y}(t)$ werden nicht alle Komponenten y_i an **einer** Stelle vorgegeben wie oben, sondern

gewisse Komponenten y_i an verschiedenen Stellen $t = a, b, c, \ldots$

Beispiele:

1) **Sturmsche Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0 y(t) &= h(t) \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= d_1 \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= d_2 \end{aligned}$$

2) **Lineare Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathrm{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathrm{B}_b\mathbf{y}(b) &= \mathbf{d} \end{aligned}$$

3) **Allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgaben**

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \end{aligned}$$

Randwerte bestimmen die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung:

Beispiel: Wir betrachten die (lineare) DGL zweiter Ordnung

$$y'' + y = 0$$

1) Die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

ergeben die eindeutig bestimmte Lösung $y(t) = \sin t$.

2) **Keine** Lösung existiert für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 1$$

3) Für die Randwerte

$$y(0) = 0 \qquad y(\pi) = 0$$

gibt es **unendlich viele** Lösungen $y(t) = c \sin t$, $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Bei Randwertproblemen gilt der folgende Existenzsatz:

Satz: Gegeben sei eine lineare Randwertaufgabe mit stetigen Funktionen $\mathbf{A}(t), \mathbf{h}(t),\ t \in \mathbb{R}$. Weiter sei $\mathbf{Y}(t)$ ein Fundamentalsystem zu $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Dann sind die folgenden Ausagen äquivalent:

1) Die lineare Randwertaufgabe ist für **alle** stetigen Inhomogenitäten $\mathbf{h}(t)$ und $\mathbf{d}$ stets eindeutig lösbar.

2) Die zugehörige Randwertaufgabe

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}, \quad \mathbf{B}_a\mathbf{y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{y}(b) = 0$$

hat nur die triviale Lösung $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$.

3) Die Matrix

$$\mathbf{E} := \mathbf{B}_a\mathbf{Y}(a) + \mathbf{B}_b\mathbf{Y}(b) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

ist regulär.

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung $y'' + y = 0$ aus dem letzten Beispiel.
Wir schreiben die Gleichung zweiter Ordnung zunächst als ein System und bestimmen anschließend das zugehörige Fundamentalsystem:

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{B}_a \mathbf{Y}(0) + \mathbf{B}_b \mathbf{Y}(b) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{E}$ ist demnach regulär für $b = \pi/2$ und singulär für $b = \pi$.

Viele andere Probleme lassen sich auf Randwertaufgaben zurückführen.

Beispiel: Gegeben sei ein **Randwertproblem mit freier Endzeit**:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \qquad 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(T)) &= 0 \end{aligned}$$

wobei T zu bestimmen ist und $\mathbf{r} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ gerade $(n+1)$ Randbedingungen definiert.

Wir setzen nun $t = \tau \cdot T$ und

$$\mathbf{z}(\tau) := \mathbf{y}(\tau \cdot T), \qquad z_{n+1}(\tau) := T \qquad 0 \leq \tau \leq 1$$

Dann gilt auf dem festen Intervall $0 \leq \tau \leq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}'(\tau) &= z_{n+1}\mathbf{f}(z_{n+1} \cdot \tau, \mathbf{z}(\tau)), \qquad z'_{n+1}(\tau) = 0 \\ \mathbf{r}(\mathbf{z}(0), \mathbf{z}(1)) &= 0 \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine allgemeine Zweipunkt–Randwertaufgabe im $\mathbb{R}^{n+1}$ über dem festen Integrationsintervall $[0, 1]$.

4.2 Grundbegriffe der Variationsrechnung

Problem der Brachistochrone (Bernoulli, 1696)

Man bestimme eine differenzierbare Funktion $y = y(t)$ mit Randbedingungen $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, so dass das Integral

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1 + (y'(t))^2}{y_a - y(x)}}\, dx$$

minimal wird.

Interpretation:

Das angegebene Funktional $I[y]$ beschreibt, bis auf einen Vorfaktor, die Zeit, die ein Massenpunkt benötigt, um unter dem Einfluss der Schwerkraft entlang der Kurve $y = y(x)$ von Punkt $A = (a, y_a)$ zum Punkt $B = (b, y_b)$ zu kommen.

Allgemeine Form einer Variationsaufgabe:

Gesucht ist eine differenzierbare Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die vorgegebenen Randbedingungen

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

erfüllt und gleichzeitig ein Funktional der Form

$$I[y] = \int\limits_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

minimiert.

Ziel:

Leite ein Randwertproblem her, dass zu obiger Variationsaufgabe äquivalent ist.

Lösungsweg: (Lagrange, 1755)

Sei $y_0(t)$ die Lösung des Variationsproblems und $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbar Funktion mit

$$h(a) = h(b) = 0$$

Dann setzen wir

$$y(t, \varepsilon) := y_0(t) + \varepsilon h(t)$$

Da $y_0(t)$ die Variationsaufgabe löst, besitzt die Funktion

$$J(\varepsilon) := I[y(, \cdot, \varepsilon) = I[y_0 + \varepsilon h]$$

im Punkt $\varepsilon = 0$ ein Minimum.

Da $J(\varepsilon)$ eine gewöhnliche Funktion der reellen Variablen ε ist, haben wir die notwendige Bedingung

$$\frac{dJ}{d\varepsilon}(0) = 0$$

Definition:

Der Ausdruck δI definiert durch

$$\delta I := \frac{d}{d\varepsilon} I[y_0 + \varepsilon h]\Big|_{\varepsilon=0}$$

nennt man die **1. Variation** des Funktionals $I[y]$.

Damit man eine Lösung des Variationsproblem erhält, muss $\delta I = 0$ gelten.

Bemerkung:

1) Die Funktion

$$\delta y(t) := \frac{\partial}{\partial \varepsilon} y(t, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} = h(t)$$

nennt man auch die **1. Variation** der abhängigen Variablen

2) Die erste Variation δI entspricht der Richtungsableitung von $I[y]$ in Richtung h an der Stelle y_0.

Wir berechnen nun die **1. Variation**:

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \frac{d}{d\varepsilon} \int\limits_a^b f(t, y_0 + \varepsilon h, y_0' + \varepsilon h')dt \Bigg|_{\varepsilon=0} \\
&= \int\limits_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') \cdot h(t) + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h'(t)}_{\text{Partielle Integration}} \right) dt \\
&= \int\limits_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt + \underbrace{f_{y'}(t, y_0, y_0') \cdot h(t)\Big|_a^b}_{=0} \\
&= \int\limits_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt
\end{aligned}
$$

Wir erhalten also aus Bedingung $\delta I = 0$:

$$\int_a^b \left(f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') \right) \cdot h(t)dt \overset{!}{=} 0$$

Da die Funktion $h(t)$ beliebig ist, folgt das sogenannte **Fundamentallemma der Variationsrechnung**

$$f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0 \qquad a \leq t \leq b$$

Satz: Jede Lösung der oben definierten Variationsaufgabe ist zugleich eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} f_y(t, y_0, y_0') - \frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') &= 0 \\ y_0(a) = y_a \qquad y_0(b) &= y_b \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung nennt man die **Euler–Lagrange–Gleichung**.

Wegen

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = f_{y't}(t, y_0, y_0') + f_{y'y}(t, y_0, y_0') \cdot y_0' + f_{y'y'}(t, y_0, y_0') \cdot y_0''$$

läßt sich die Euler–Lagrange Gleichung unter der Regularitätsbedingung

$$f_{y'y'}(t, y_0, y_0') \neq 0$$

nach y_0'' auflösen und damit in der expliziten Form

$$y_0'' = \frac{f_y(t, y_0, y_0') - f_{y't}(t, y_0, y_0') - f_{y'y}(t, y_0, y_0') \cdot y_0'}{f_{y'y'}(t, y_0, y_0')}$$

schreiben.

Bemerkung:

Die Gleichung läßt sich in zwei Spezialfällen vereinfachen:

1) die Funktion f ist unabhängig von y

2) oder f hängt nicht explizit von t ab.

Zwei Spezialfälle:

1) Hängt f nicht von y ab, $f = f(t, y')$ so lautet die Euler–Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(t, y_0, y_0') = 0$$

Dies bedeutet aber für alle $a \leq t \leq b$:

$$f_{y'}(t, y_0, y_0') = \text{const.}$$

2) Hängt f nicht explizit von t ab, so gilt für alle $a \leq t \leq b$:

$$H := f - f_{y'} y' = \text{const.}$$

denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} H(t) &= \frac{d}{dt}(f - f_{y'} y') = f_y y' + f_{y'} y'' - \left(\frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' - f_{y'} y'' \\
&= \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}\right) y' = 0
\end{aligned}$$

Beispiel: (Problem der Brachistochrone)

Gesucht ist eine $\mathcal{C}^1$–Funktion $y(t)$, die das Funktional

$$I[y] := \int_a^b \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(x)}}\, dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$y(a) = y_a \qquad y(b) = y_b$$

minimiert. Der Integrand von $I[y]$ hängt nicht explizit von t ab, wir bestimmen daher die **Hamilton–Funktion**:

$$\begin{aligned} H &= f - f_{y'} y' \\ &= \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a - y(x)}} - \sqrt{\frac{y_a - y(t)}{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a - y(t)} \cdot y'(t) \end{aligned}$$

Hamilton–Funktion:

$$
\begin{aligned}
H &= \sqrt{\frac{1+(y'(t))^2}{y_a-y(x)}} - \sqrt{\frac{y_a-y(t)}{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{y'(t)}{y_a-y(t)} \cdot y'(t) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y_a-y(x)}} = c_1 = \text{const.}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt die Differentialgleichung

$$
y' = \sqrt{\frac{2c-(y_a-y)}{y_a-y}} \qquad 2c := \frac{1}{c_1^2} > 0
$$

Trennung der Variablen ergibt die implizite Darstellung:

$$
\int\limits_{y_a}^{y} \sqrt{\frac{y_a-\eta}{2c-(y_a-\eta)}} d\eta = t-a
$$

und dies liefert als Lösung eine **Zykloide** (Band 1, Beispiel 14.2.2)

4.3 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

Wir betrachten eine lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} L[y] &:= y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = h(t) \\ R_1[y] &:= \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) + \gamma_1 y(b) + \delta_1 y'(b) = d_1 \\ R_2[y] &:= \alpha_2 y(a) + \beta_2 y'(a) + \gamma_2 y(b) + \delta_2 y'(b) = d_2 \end{aligned}$$

Damit das oben stehende System eine Lösung hat, nehmen wir an, dass die zugehörige homogene Randwertaufgabe

$$L[y] = 0, \qquad R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt.

Zunächst:

Das Problem läßt sich stets auf ein **Problem mit homogenen Randbedingungen** zurückführen.

Rückführung auf homogene Randbedingungen:

Sei $y_0(t)$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion mit

$$R_1[y_0] = d_1 \qquad R_2[y_0] = d_2$$

d.h. $y_0(t)$ erfüllt die gegebenenen Randbedingungen.

Wir setzen

$$z(t) := y(t) - y_0(t)$$

Dann gilt:

Löst $y(t)$ das Problem

$$L[y] = h(t), \qquad R_1[y] = d_1, \qquad R_2[y] = d_2,$$

so löst $z(t)$ das homogene Randwertproblem

$$L[z] = \tilde{h}(t) := h(t) - L[y_0](t), \qquad R_1[z] = 0, \qquad R_2[z] = 0$$

Die Greensche Funktion:

Randwertprobleme zweiter Ordnung mit homogenen Randbedingungen lassen sich mit Hilfe der Greenschen Funktion lösen:

$$y(t) = \int\limits_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Man nennt $G(t,\tau)$, $a \le t, \tau \le b$ die **Greensche Funktion**.

Entscheidender Vorteil:

Die Greensche Funktion hängt nur vom Differentialoperator $L[y]$ ab, aber **nicht** von der Inhomogenität $h(t)$.

Ist die Greensche Funktion für den Differentialoperator $L[y]$ bestimmt, so lassen sich die Lösungen mit beliebiger Inhomogenität in der obigen Form darstellen.

Konstruktion der Greenschen Funktion:

Wir nehmen an, dass $G(t,\tau)$ auf den beiden Mengen

$$D_1 := \{(t,\tau) \ : \ a \le \tau \le t \le b\} \qquad D_2 := \{(t,\tau) \ : \ a \le t \le \tau \le b\}$$

glatt ist, d.h. sich als eine $\mathcal{C}^2$–Funktion auf den Rand fortsetzen lässt. dass jedoch $G(t,\tau)$ für $t = \tau$ Sprünge haben können.

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau \\
y'(t) &= \frac{d}{dt}\left\{\int_a^t G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \int_t^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau\right\} \\
&= \int_a^b G_t(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G(t,t^-) - G(t,t^+)\right]\,h(t)
\end{aligned}$$

Wir verlangen:

$$G(t,t^-) - G(t,t^+) = 0$$

d.h. die Funktion $G(t,\tau)$ ist stetig für $t = \tau$.

Für die zweite Ableitung gilt dann:

$$y''(t) = \int_a^b G_{tt}(t,\tau)h(\tau)\,d\tau + \left[G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+)\right]\,h(t)$$

und daher

$$L[y](t) = \int_a^b L[G(\cdot,\tau)](t)h(\tau)\,d\tau + \left[G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+)\right]\,h(t)$$

Wir fordern daher für die Greensche Funktion $G(t,\tau)$:

$$L[G(\cdot,\tau)] = 0 \quad \text{und} \quad G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1$$

Satz: Erfüllt eine Funktion $G(t,\tau)$ die folgenden Eigenschaften:

1) Die Funktion $G(t,\tau)$ ist stetig auf $[a,b]^2$ und lässt sich auf D_1 und D_2 als $\mathcal{C}^2$–Funktion fortsetzen.

2) Die Funktion $G(t,\tau)$ erfüllt bei festem τ die homogene Differentialgleichung $L[G(\cdot,\tau)] = 0$ für $t \in [a,\tau]$ und $t \in [\tau,b]$ und die Randbedingungen:

$$R_k[G(\cdot,\tau)] = 0, \qquad k = 1,2$$

3) Die Funktion $G(t,\tau)$ erfüllt die Bedingung

$$G_t(t,t^-) - G_t(t,t^+) = 1$$

so ist die Lösung $y(t)$ des Randwertproblems gegeben durch

$$y(t) = \int_a^b G(t,\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Verfahren zur Konstruktion einer Greenschen Funktion:

1) Ist $y_1(t), y_2(t)$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, so machen wir den **Ansatz**:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) + b_2(t))y_2(t) & : \quad \tau \le t \\ (a_1(t) - b_1(t))y_1(t) + (a_2(t) - b_2(t))y_2(t) & : \quad \tau \ge t \end{cases}$$

2) Die Stetigkeit und Sprungbedingung an $G(t,\tau)$ liefert dann:

$$\begin{aligned} b_1(t)y_1(t) + b_2(t)y_2(t) &= 0 \\ b_1(t)y_1'(t) + b_2(t)y_2'(t) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dies ist ein LGS für $b_1(t)$ und $b_2(t)$ mit regulärer Koeffizientenmatrix.

3) Die Randbedingungen ergeben schliesslich ein LGS für die beiden Größen $a_1(t)$ und $a_2(t)$, das ebenfalls eindeutig lpsbar ist.

Beispiel: Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= h(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

Ein **Fundamentalsystem** ist $y_1(t) = \cos t$ und $y_2(t) = \sin t$.

Unser **Ansatz** für die Greensche Funktion lautet daher

$$G(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(t) + b_1(t)) \cos t + (a_2(t) + b_2(t)) \sin t & : \quad \tau \le t \\ (a_1(t) - b_1(t)) \cos t + (a_2(t) - b_2(t)) \sin t & : \quad \tau \ge t \end{cases}$$

LGS für die Koeffizienten $b_1(t)$ und $b_2(t)$:

$$\begin{aligned} b_1(t) \cos t + b_2(t) \sin t &= 0 \\ -b_1(t) \sin t + b_2(t) \cos t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Zur **Lösung** des LGS:

$$\begin{aligned} b_1(t)\cos t + b_2(t)\sin t &= 0 \\ -b_1(t)\sin t + b_2(t)\cos t &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Multipliziere mit $\sin t$ bzw. $\cos t$ und addiere:

$$(\sin^2 t + \cos^2 t) b_2(t) = \frac{1}{2}\cos t$$

Damit ergibt sich direkt

$$b_2(t) = \frac{1}{2}\cos t$$

und durch Einsetzen erhalten wir

$$b_1(t) = -\frac{1}{2}\sin t$$

Einsetzen von $G(t,\tau)$ in **Randbedingungen**:

Die homogenen Randbedingungen lauten

$$y(0) - y(\pi) = 0, \qquad y'(0) - y'(\pi) = 0$$

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
G(0,\tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=0} \\
&= a_1(\tau) + b_1(\tau) \\
G(\pi,\tau) &= (a_1(\tau) + b_1(\tau)) \cos t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \sin t|_{t=\pi} \\
&= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \\
G_t(0,\tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=0} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=0} \\
&= a_2(\tau) + b_2(\tau) \\
G_t(\pi,\tau) &= -(a_1(\tau) + b_1(\tau)) \sin t|_{t=\pi} + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) \cos t|_{t=\pi} \\
&= -(a_2(\tau) + b_2(\tau))
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} G(0,\tau) - G(\pi,\tau) &= (a_1(\tau) - b_1(\tau)) + (a_1(\tau) + b_1(\tau)) = 0 \\ G_t(0,\tau) - G_t(\pi,\tau) &= (a_2(\tau) - b_2(\tau)) + (a_2(\tau) + b_2(\tau)) = 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt aber: $a_1(\tau) = a_2(\tau) = 0$.

Die **Greensche Funktion** ist also gegeben durch

$$G(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(t-\tau) & : \quad \tau \leq t \\ -\frac{1}{2}\sin(t-\tau) & : \quad \tau \geq t \end{cases}$$

und die Lösung der Randwertaufgabe lautet:

$$y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-\tau)h(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2}\int_t^\pi \sin(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

Die Lösungformel gilt für **beliebige** Inhomogenitäten $h(t)$.

4.4 Eigenwertaufgaben

Gegeben sei ein homogenes lineares Randwertproblem n–ter Ordnung

$$\begin{aligned} L[y] &= y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t,\lambda)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t,\lambda)y(t) = 0 \\ R_k[y] &= \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_{k,l}y^{(l)}(a) + \beta_{k,l}y^{(l)}(b)) = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichung und die Randbedingungen hängen von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ab.

Bestimmung nichttrivialer Lösungen:

Sei $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von $L[y]$. Dann hängen die y_k gegebenenfalls auch von λ ab, d.h. $y_k = y_k(t,\lambda)$.
Eine Lösung lässt sich als Linearkombination darstellen:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t,\lambda)$$

Die Linearkombination

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t, \lambda)$$

ist eine Lösung, falls die Randbedigungen

$$R_j[y] = \sum_{k=1}^{n} c_k R_j[y_k] = 0, \qquad j = 1, \ldots, n$$

erfüllt sind. Dies ist ein homogenes LGS für $c_1, \ldots, c_n$ mit Koeffizienten-matrix

$$\mathbf{E}(\lambda) := \begin{pmatrix} R_1[y_1] & \ldots & R_1[y_n] \\ \vdots & \vdots & \\ R_n[y_1] & \ldots & R_n[y_n] \end{pmatrix}$$

Das Randwertproblem hat also genau dann nichttriviale Lösungen $y(t) \neq 0$, falls gilt

$$D(\lambda) := \det \mathbf{E}(\lambda) = 0$$

Definition:

Die Werte $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ mit $D(\lambda) = 0$ heißen **Eigenwerte** der Randwertaufgabe. Die zugehörigen nichttrivialen Lösungen nennt man die zugehörigen **Eigenfunktionen**. Diese sind höchstens bis auf skalare Vielfache eindeutig.

Die Bedingung $D(\lambda) = 0$ ist im allgemeinen ein nichtlineares Nullstellenproblem mit unendlich vielen Lösungen.

Bemerkung:

Eigenwertprobleme lassen sich in nichtlineare Randwertaufgaben transformieren: Wir setzen $y_{n+1}(t) := \lambda$ und findet dann

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= -a_{n-1}(t, y_{n+1})y^{(n-1)}(t) - \ldots - a_0(t, y_{n+1})y(t) \\ y'_{n+1} &= 0 \\ R[y, y_{n+1}] &= 0 \\ y'(a) &= 1 \quad \text{(Normierung)} \end{aligned}$$

Beispiel:

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \;\Rightarrow\; c_2 \sin(\lambda t) = 0$$

Für die Eigenwerte ergibt sich demnach

$$\lambda_k = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(t) = \sin(\lambda_k t)$$

Beispiel:

Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$y'' + \lambda^2 y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y(1) - y'(1) = 0$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet:

$$y(t) = c_1 \cos(\lambda t) + c_2 \sin(\lambda t)$$

Die Randbedingungen ergeben dann

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \ &\Rightarrow \ c_1 = 0 \\ y(1) - y'(1) = 0 \ &\Rightarrow \ c_2(\sin(\lambda t) - \lambda \cos(\lambda t)) = 0 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also die Lösungen der nichtlinearen Gleichung $\lambda = \tan \lambda$ mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$y_k(t) = \begin{cases} \sin(\lambda_k t) & : \ \lambda_k \neq 0 \\ t & : \ \lambda_k = 0 \end{cases}$$

Kapitel 5: Numerische Verfahren für Anfangswertprobleme

5.1 Allgemeines

Gegeben sei das skalare Anfangswertproblem

$$y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(a) = y_a$$

Wir wollen die Lösung $y(t)$ an einer Stelle $b > a$ berechnen.

Kann man die Lösung nicht explizit durch Integration bestimmen, so verwendet man ein

Diskretisierungsverfahren:

Definiere Zerlegung des Integrationsintervalls

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$$

und die Näherungen

$$Y_j \approx y(t_j), \qquad j = 0, \ldots, m$$

Man nennt $h_j := t_{j+1} - t_j$ die **Schrittweite**.

Definition: Das Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung $(Y_0, \ldots, Y_m)$ bezeichnet man als **Numerischen Integrator**.

Numerische Verfahren lassen sich bestimmten Klassen zuordnen:

1) **Einschrittverfahren:**

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \, \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Man nennt Φ die **Verfahrensfunktion**.

2) **Mehrschrittverfahren:**

$$Y_{j+1} = \Phi(Y_j, \ldots, Y_{j-k}), \qquad k \in \mathbb{N}$$

Man verwendet die bereits berechneten Näherungen $Y_j, \ldots, Y_{j-k}$.

3) **Extrapolationsverfahren**

Kombiniere ein Einschritt– bzw. Mehrschrittverfahren aus 1) und 2) mit verschiedenen Schrittweiten und extrapoliere das Ergebnis.

Wichtige Fragen zur Qualität eine Integrators:

1) Es gelte $Y_j = y(t_j)$. Welchen Fehler machen wir im nächsten Integrationsschritt, d.h.

$$|y(t_{j+1}) - Y_{j+1}| = ?$$

2) Wenn wir die **lokalen** Fehler aus 1) kontrollieren können, was gilt dann zur Zeit $t = b$, d.h.

$$|y(b) - Y_m| = ?$$

   Insbesondere, wenn wir $h_j \to 0$ wählen, d.h. **konvergiert** das Verfahren im Grenzfall $h_j \to 0$?

3) Gibt es eine geeignete Wahl für die Schrittweite h_j, so dass etwa der Approximationsfehler – etwa im Vergleich zum Rechenaufwand – minimal wird.

5.2 Einschrittverfahren

Das **Eulersche Polygonzugverfahren** ist das einfachste Einschrittverfahren

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j\, f(t_j, Y_j)$$

Das Verfahren entsteht aus der Approximation

$$y'(t_y) = f(t_j, Y_j) \approx \frac{1}{h_j}(Y_{j+1} - Y_j)$$

Geometrische Deutung:

Zur Berechnung des Wertes Y_j laufe ich immer ein kurzes Stück in Richtung der Tangente im Punkt Y_j, d.h. entlang der Geraden mit Steigung $f(t_j, Y_j)$.

Verfahren von Heun: Wähle den Mittelwert zweier Steigungen

$$
\begin{aligned}
K_1 &:= f(t_j, Y_j) \\
K_2 &:= f(t_j + h_j, Y_j + h_j K_1) \\
Y_{j+1} &:= Y_j + h_j \left(\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 \right)
\end{aligned}
$$

Das modifizierte Euler–Verfahren: (Collatz, 1960)

Wähle eine mittlere Steigung

$$
\begin{aligned}
K_1 &:= f(t_j, Y_j) \\
K_2 &:= f\left(t_j + \frac{h_j}{2}, Y_j + \frac{h_j}{2} K_1 \right) \\
Y_{j+1} &:= Y_j + h_j K_2
\end{aligned}
$$

Definition:

Gegeben sei die Näherung (t_j, Y_j) und ein Einschrittverfahren in der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \, \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

Sei $z(t)$ die Lösung des (lokalen) Anfangswertproblems

$$z'(t) = f(t, z(t)), \qquad z(t_j) = Y_j$$

1) Das **exakte Inkrement** ist gegeben durch

$$\Delta(t_j, Y_j, h) := \frac{z(t_j + h) - Y_j}{h}$$

2) Man nennt dann

$$\tau(t_j, Y_j, h) := \Delta(t_j, Y_j, h) - \Phi(t_j, Y_j, h)$$

den **lokalen Diskretisierungsfehler**.

Definition: (Fortsetzung)

3) Das Einschrittverfahren heißt **konsistent**, falls für alle hinreichen oft stetig differenzierbaren rechten Seiten $f(t, y)$ gitl:

$$\lim_{h \to 0} \tau(t_j, Y_j, h) = 0$$

Das Einschrittverfahren besitzt die **Ordnung** p, falls gilt:

$$\tau(t_j, Y_j, h) = O(h^p)$$

d.h.

$$\exists\, C, h_0 > 0 \;:\; \forall\, h \in (0, h_0] \;:\; |\tau(t_j, Y_j, h)| \leq C h^p$$

Bemerkung: Man kann den lokalen Diskretisierungsfehler auch als

$$\tau(t_j, Y_j, h) = \frac{1}{h}(z(t_{j+1}) - Y_{j+1})$$

darstellen, d.h. τ ist der Integrationsfehler pro Schrittweite.

Bestimmung der Konsistenzordnung:

Man verwendet dazu die Taylor–Entwicklung von $z(t+h)$ um $h = 0$

$$z(t+h) = z(t) + z'(t)h + z''(t)\frac{h^2}{2} + \ldots$$

Nun gilt neben $z(t) = Y$

$$\begin{aligned} z'(t) &= f(t, z(t)) \\ z''(t) &= f_t(t,z) + f_y(t,z)z' = f_t(t,z) + f_y(t,z)f(t,z) \\ z^{(3)}(t) &= f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d \end{aligned}$$

Wir erhalten daher für $\Delta(t, y, h) = (z(t+h) - Y)/h$ den Ausdruck

$$\Delta = f + \frac{h}{2}(f_t f_y f) + \frac{h^2}{6}(f_{tt} + 2f_{ty}f + f_{yy}f^2 + f_t f_y + f_y^2 d) + O(h^3)$$

Beispiel:

1) Beim Euler–Verfahren gilt $\Phi = f(t, Y)$ und daher

$$\tau = \Delta - \Phi = f + \frac{h}{2}(f_t f_y f) + O(h^2) - \Phi = \frac{h}{2}(f_t f_y f) + O(h^2)$$

Das Verfahren ist also konsistent erster Ordnung.

2) Beim Verfahren von Heun gilt

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{2}(f(t, Y) + f(t + h, Y + hf(t, Y)) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(t, Y) + f(t, Y) + \frac{h}{2}(f_t(t, Y) + f_y(t, Y)f(t, Y)) + O(h^2)\right) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tau = \Delta - \Phi = O(h^2)$$

Das Heun–Verfahren ist ein konsistentes Verfahren zweiter Ordnung.

Satz:

Die exakte Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = f(t, y(t)), \qquad y(a) = y_a$$

existiere im Intervall $[a, b]$. Das Einschrittverfahren der Form

$$Y_{j+1} = Y_j + h_j \, \Phi(t_j, Y_j, h_j)$$

sei konsistent und besitze die Ordnung p mit $|\tau(t, Y, h)| \leq C h^p$.

Ferner sei die Verfahrensfunktion Φ Lipschitz–stetig bezüglich Y:

$$|\Phi(t, \tilde{Y}, h) - \Phi(t, Y, h)| \leq L |\tilde{Y} - Y|$$

Dann gilt für die mit äquidistanter Schrittweite $h = (b - a)/m$, $m \in \mathbb{N}$, berechneten Näherungen $Y_m = Y(b; h)$ von $y(b)$:

$$|Y(b; h) - y(b)| \leq \frac{1}{L} \left(e^{L(b-a)} - 1 \right) C h^p$$

Runge–Kutta–Verfahren:

Allgemeine Form mit **Stufenzahl** s

$$\begin{aligned} Y_{j+1} &= Y_j + h_j \sum_{i=1}^{s} c_i K_i(t_j, Y_j, h_j) \\ K_1(t,Y,h) &= f(t,Y) \\ K_i(t,Y,h) &= f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right) \end{aligned}$$

Schreibweise: (Butcher–Schema)

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ a_2 & b_{21} & & & & \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a_s & b_{s1} & b_{s2} & & \dots & b_{s,s-1} \\ \hline & c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & c_s \end{array}$$

Beispiele:

1) Verfahren von Heun ($p = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

2) Modifiziertes Euler–Verfahren ($p = 2$)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Beispiele:

3) Kutta–Regel ($p = 3$)

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\
1 & -1 & 2 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

4) Klassische Runge–Kutta–Verfahren ($p = 4$)

$$\begin{array}{c|cccc}
0 & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}
\end{array}$$

Runge–Kutta–Fehlberg–Verfahren

Man kombiniert zwei RK–Verfahren der Ordnung p und $p+1$, um eine automatische Schrittweitensteuerung zu generieren:

$$\begin{aligned} \frac{z(t_j+h)-Y_{j+1}}{h} &= Ch^p + O(h^{p+1}) \\ \frac{z(t_j+h)-\widehat{Y}_{j+1}}{h} &= O(h^{p+1}) \end{aligned}$$

Daraus folgt aber

$$\tau(t_j, Y_j, h) \approx Ch^p \approx \frac{|\widehat{Y}_{j+1} - Y_j|}{h} =: \tau_{est}$$

Wähle die Schrittweite stets so, dass

$$\tau_{est} \leq \text{TOL}$$

mit gegebener Genauigkeitstoleranz TOL gilt.

Allgemeine Form der RKF–Verfahren:

$$
\begin{aligned}
Y_{j+1} &= Y_j + h_j \sum_{i=1}^{s} c_i K_i(t_j, Y_j, h_j) \\
\widehat{Y}_{j+1} &= Y_j + h_j \sum_{i=1}^{\hat{s}} \hat{c}_i K_i(t_j, Y_j, h_j) \\
K_i(t, Y, h) &= f\left(t + a_i h, Y + h \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} K_l\right)
\end{aligned}
$$

Beispiel: RKF2(3)–Verfahren nach Fehlberg (1969)

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\
\hline
p = 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
p = 3 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}
\end{array}
$$

Beispiel: RKF4(5)–Verfahren nach England (1969)

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\
1 & 0 & -1 & 2 & & & \\
\frac{2}{3} & \frac{7}{27} & \frac{10}{27} & 0 & \frac{1}{27} & & \\
\frac{1}{5} & \frac{28}{625} & -\frac{1}{5} & \frac{546}{625} & \frac{54}{625} & -\frac{378}{625} & \\
\hline
 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 & \\
 & \frac{14}{336} & 0 & 0 & \frac{35}{336} & \frac{162}{336} & \frac{125}{336}
\end{array}$$

5.3 Anfangswertmethoden für Randwertprobleme

Das einfache Schießverfahren (shooting method)

Wir betrachten ein Randwertproblem zweiter Ordnung der Form

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a, \quad y(b) = y_b \end{aligned}$$

Idee eines Schießverfahrens:

Kombiniere ein numerisches Verfahren für das zugehörige Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' &= f(t, y, y') \\ y(a) &= y_a, \quad y'(a) = z \end{aligned}$$

mit einem iterativen Prozess bezüglich des (freien) Parameters z, um die rechte Randbedingung zu erfüllen, d.h.

$$y(b) = y_b$$

Bezeichnen wir mit $y(t; z)$ die Lösung des Anfangswertproblems, so führt das Schießverfahren auf ein Nullstellenproblem der Funktion

$$F(z) := y(b; z) - y_b$$

Beispiel: Für die Randwertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1$$

erhalten wir das zugehörige Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = z$$

die Lösung

$$y(x) = z \sin x + 4 \cos x$$

Die Funktion $F(z)$ lautet daher

$$F(z) = z \sin 1 + 4 \cos 1 - 1$$

Zur Lösung des Nullstellenproblems $F(z) = 0$ haben wir zwei Verfahren kennengelernt:

1) **Das Bisektionsverfahren** Seien z_1 und z_2 zwei Punkte mit $F(z_1) \cdot F(z_2) < 0$:

$$\begin{array}{rcl} z_3 & := & \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \\ \text{Falls} & F(z_1) \cdot F(z_3) < 0 & : \; z_1 := z_3 \\ \text{sonst} & & : \; z_1 := z_2 \end{array}$$

2) **Das Newtonverfahren**
   Iterationsvorschrift:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{F(z_k)}{F'(z_k)}$$

   Das Newton–Verfahren konvergiert i.A. quadratisch, aber man muss die Ableitung $F'(z_k)$ berechnen.

Allgemeine Zweipunkt–Randwertprobleme

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{r}(\mathbf{y}(a), \mathbf{y}(b)) &= 0 \end{aligned}$$

Schießverfahren: Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{y}(a) &= \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit der Lösung $\mathbf{y}(t; \mathbf{z})$.

Das äquivalente Nullstellenproblem lautet jetzt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) := r(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b\ \mathbf{z})) = \mathbf{0}$$

Die Funktion $\mathbf{F} : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ ist glatt, falls $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ und $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ hinreichend oft stetig differenzierbar sind.

Zur Lösung des Nullstellenproblems $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ verwendet man etwa das **gedämpfte Newton–Verfahren** aus Analysis III :

für $\quad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{Jf}(\mathbf{z}^k) \cdot \Delta\mathbf{z}^k = -f(\mathbf{z}^k)$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \lambda_k \Delta\mathbf{z}^k$$

Dabei ist die Jacobi–Matrix $\mathbf{Jf}(\mathbf{z})$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{Jf}(\mathbf{z}) &= \mathbf{B}_a + \mathbf{B}_b \cdot \mathbf{Y}(b) \\
\mathbf{B}_a &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b;\mathbf{z}))} \\
\mathbf{B}_b &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{r}(\mathbf{u}, \mathbf{v})\Big|_{(\mathbf{z}, \mathbf{y}(b;\mathbf{z}))} \\
\mathbf{Y}(b) &:= \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{y}(b; \mathbf{z})
\end{aligned}$$

Beispiel: (für das das Schießverfahren **nicht** funktioniert)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1 \end{aligned}$$

Für $\lambda = 5$ besitzt die zugehörige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda \sinh(\lambda y) \\ y(0) &= 0, \quad y'(0) = z \end{aligned}$$

nur für $|z| \leq 0.05$ eine Lösung, die auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ existiert.

Für die tatsächliche Lösung der Randwertwertaufgabe gilt

$$z^* = 0.0457504...$$

Beispiel: (Lösung kann bezüglich $\mathbf{z}$ stark variieren)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = 12y + y', \qquad y(0) = y(10) = 1$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe kann man explizit berechnen:

$$y(t; z_1, z_2) = \frac{4z_1 - z_2}{7} e^{-3t} + \frac{3z_1 + z_2}{7} e^{4t}$$

Mit den Randwerten $y(0) = y(10) = 1$ folgt

$$z_1^* = y(0) = 1, \quad z_2^* = y'(0) = -3 + 2.9 \ldots \cdot 10^{-17}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} y(10; 1, -3) &= e^{-30} \approx 9.36 \cdot 10^{-14} \\ y(10; 1, -3 + 10^{-10}) &\approx \frac{1}{7} e^{30} \approx 1.53 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

Korrekte numerische Berechnung nahezu unmöglich!

Die Mehrzielmethode (multiple shooting method)

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{r}(\mathbf{y}(a),\mathbf{y}(b)) &= 0
\end{aligned}
$$

Kombiniere das (einfache) Schießverfahren mit einer Intervallunterteilung von $[a,b]$:

$$a = t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$$

Man nennt die t_i's auch die **Mehrzielknoten**.

Löse auf jedem Teilintervall (numerisch) das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= \mathbf{f}(t,\mathbf{y}(t)), \quad t_j \le t \le t_{j+1} \\
\mathbf{y}(t_j) &= \mathbf{z}_j
\end{aligned}
$$

und bezeichne die Lösung mit $\mathbf{y}(t;t_j,\mathbf{z}_j)$, $j = 1,\ldots,m-1$.

Die zusammengesetzte Lösung

$$\mathbf{y}(t;\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1}) := \begin{cases} \mathbf{y}(t;t_1,\mathbf{z}_1) & : \; t_1 \le t < t_2 \\ \mathbf{y}(t;t_2,\mathbf{z}_2) & : \; t_2 \le t < t_3 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \mathbf{y}(t;t_{m-1},\mathbf{z}_{m-1}) & : \; t_{m-1} \le t < t_m \end{cases}$$

erfüllt genau dann die Randwertaufgabe, wenn gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_j(\mathbf{z}_j,\mathbf{z}_{j+1}) &:= \mathbf{y}(t_{j+1};t_j,\mathbf{z}_j) - \mathbf{z}_{j+1} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,m-2 \\ \mathbf{F}_{m-1}(\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_{m-1}) &:= \mathbf{r}(\mathbf{z}_1,\mathbf{y}(t_m;t_{m-1},\mathbf{z}_{m-1})) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu einem Nullstellenproblem für die Funktion

$$\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1,\ldots,\mathbf{F}_{m-1})^T : D \to \mathbb{R}^{(m-1)n}, \quad D \subset \mathbb{R}^{(m-1)n}$$

Zur Lösung verwendet man wieder das gedämpfte Newton–Verfahren.