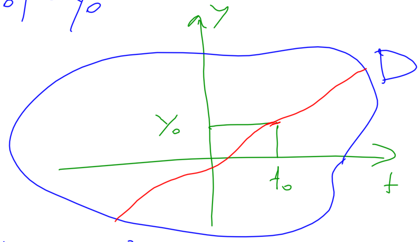
Dgl Vo 16.11.09

$y' = f(t, y)$

$y(t_0) = y_0$ AWP



f stetig
f Lipschitz $\Big\} \Rightarrow \exists!$ Lsg

Nov 16-14:13

Lineare Dgl

$y'(t) = A(t)\,y(t) + h(t) = f(t, y(t))$

·) Ann. $A(t), h(t)$ stetig

·) $|f(t,y) - f(t,z)| = |A(t)(y-z) + \cancel{h} - \cancel{h}|$

$\leq |A(t)|\,|y-z|$

$\Rightarrow L$

Heute $A = A(t)$

Nov 16-14:26

Bspl $y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 4t \end{pmatrix}}_{A(t)} y$, $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Spur $A(t) = 6t$

·) $y^{1\prime} = A(t)\,y^1$ $y^1(0) = v^1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$y_2^1 = 0$

$y_1^{1\prime} = 2t\,y_1^1$ $y_1^1(0) = 1$ $\Rightarrow$

$y_1^1 = e^{t^2}$

$\Rightarrow y^1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^2} \\ 0 \end{pmatrix}$

·) $y^{2\prime} = A(t)\,y^2$, $y^2(0) = v^2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y_1^2 = 0$

$y_2^{2\prime} = 4t\,y_2^2$ $y_2^2(0) = 1$ $\Rightarrow$ $y_2^2(t) = e^{2t^2}$

$y^2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t^2} \end{pmatrix}$

·) $y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 1 \cdot e_2$

$\Rightarrow y(t) = 2y^1(t) + 1 \cdot y^2(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t^2} \\ e^{2t^2} \end{pmatrix}$

·) $W(t) = \det(Y(t)) = \det\begin{pmatrix} e^{t^2} & 0 \\ 0 & e^{2t^2} \end{pmatrix} = e^{t^2} \cdot e^{2t^2} = e^{3t^2}$

$W'(t) = 6t\,e^{t^2} = 6t \cdot e^{3t^2} = \text{Spur}\,A(t) \cdot W(t)$

Nov 16-14:41

Beweis:

Da $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ eine Basis bilden, ist die Matrix $\mathbf{Y}(t_0)$ regulär, denn

$$\mathbf{Y}(t_0) = (\mathbf{y}^1(t_0), \ldots, \mathbf{y}^n(t_0)) = (\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n)$$

Weiter gilt für

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t)$$

offensichtlich y löst $y' = Ay$

$$\mathbf{y}'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{d}{dt} \mathbf{y}^k(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{A}(t) \mathbf{y}^k(t)$$

A linear $$= \mathbf{A}(t) \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{y}^k(t) \right) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t)$$

Also ist $\mathbf{y}(t)$ eine Lösung.

Nov 16-14:50

$y' = A(t)\,y$

$n = 2$ y^1, y^2,

$W(t) = \det(y^1, y^2) = y_1^1 y_2^2 - y_1^2 y_2^1$

$W'(t) = y_1^1 y_2^{2\prime} + y_1^{1\prime} y_2^2 - y_1^{2\prime} y_2^1 - y_1^2 y_2^{1\prime} =$

$= y_1^1(\cancel{a_{21} y_1^2} + a_{22} y_2^2) + \underline{y_2^2(a_{11} y_1^1} + \cancel{a_{12} y_2^1})$

$- \underline{y_2^1(a_{11} y_1^2} + \cancel{a_{12} y_2^2}) - y_1^2(\cancel{a_{21} y_1^1} + a_{22} y_2^1)$

$= (a_{11} + a_{22})(y_1^1 y_2^2 - y_2^1 y_1^2) = \text{Spur}\,A(t)\,W(t)$

Nov 16-14:54

Die inhomogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{h}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0 \end{aligned}$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichung verwenden wir wie im skalaren Fall die **Variation der Konstanten**:

$$\underline{\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c}(t)}$$

$y(t) = Y(t)\,c$ Lsg homogen Sys.

Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= \mathbf{Y}'(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \\ &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{Y}(t)\,\mathbf{c}'(t) \end{aligned}$$

!!

$h(t)$

$Y'(t) = A(t)\,Y(t)$

$(y^1(t), \ldots, y^n(t))' = A(t) \cdot$

$(y^1(t), \ldots, y^n(t))$

Nov 16-15:15

Die Funktion $y(t) = Y(t)\,c(t)$ löst die inhomogene Gleichung, falls:

$$\boxed{Y(t)\,c'(t) = h(t)}$$

Da $Y(t)$ regulär ist, können wir dies auch in der Form

$$c'(t) = Y^{-1}(t)\,h(t)$$

schreiben. Durch Integration erhält man

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

Satz: Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung lautet:

$$y(t) = Y(t)\underbrace{\left(c_0 + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(\tau)\,h(\tau)\right)}_{c(t)}$$

Mit $c_0 := Y(t_0)^{-1}y_0$, gilt $y(t_0) = y_0$.

$$\underbrace{y(t_0) = Y(t_0)\Big(c_0 + \int_{t_0}^{t_0}}_{} \underbrace{\Big)}_{=0}$$

$$c_0 = Y(t_0)^{-1}y(t_0)$$

Nov 16-15:18

Beweis: (Fortsetzung)

Sei nun $y^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung. Dann setzen wir

$$c^* := Y(t_0)^{-1}y^*(t_0)$$

Dann sind $y^*(t)$ und $y(t) := Y(t)\,c^*$ beide Lösungen des Anfangswertproblems

ist Lsg

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad y(t_0) = y^*(t_0) = Y(t_0)\,c^* = Y(t_0)\underbrace{Y(t_0)^{-1}}_{I_n}y^*(t_0) = y^*(t_0)$$

Da die Lösung aber eindeutig ist, folgt $y^*(t) = y(t)$. Also gilt

$$\boxed{y^*(t) = Y(t)\,c^*}$$

Damit ist Teil 1) gezeigt.

Nov 16-14:54

Beweis: (Fortsetzung)

Teil 2) des Satzes besagt, dass $Y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär ist:
Sei dazu $t_1 \neq t_0$ fest. Wir zeigen dann folgende Aussage:

$$\boxed{\forall\, y^1 \in \mathbb{R}^n\ \exists\, c \in \mathbb{R}^n\ :\ Y(t_1)\,c = y^1} \qquad y^1 = Y(t_1)^{-1}c$$

denn dann ist $Y(t_1)$ regulär.
Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t), \qquad y(t_1) = y^1$$

so existiert stets eine eindeutige Lösung, die nach Teil 1) in der Form

$$y(t) = Y(t)\,c$$

mit einem geeigneten $c \in \mathbb{R}^n$ geschrieben werden kann.
Für $t = t_1$ gilt dann:

$$\boxed{Y(t_1)\,c = y^1}$$

Nov 16-14:58

Wronski–Determinante

Die C^1–Funktion

$$W(t) = \det\,(Y(t))$$

nennt man die Wronski–Determinante der linearen Differentialgleichung zum Fundamentalsystems $Y(t)$.
Die Wronski–Determinante ist selbst Lösung einer (skalaren) linearen DGL, es gilt nämlich:

$$\boxed{W'(t) = \text{Spur}\,(A(t)) \cdot W(t)} \qquad \text{Spur } A(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$$

Mittels Trennung der Variablen erhält man die Lösungsdarstellung

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \text{Spur}\,(A(\tau))\,d\tau\right)$$

$$W(t_0) \neq 0 \implies W(t) \neq 0 \quad \forall t.$$

Nov 16-15:01

Kapitel 3: Lineare Differentialgleichungen

3.1 Systeme erster Ordnung

Explizites lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung:

(1) $$y'(t) = A(t)y(t) + h(t)$$

wobei $A(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $h(t) \in \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen in t sind. $\Rightarrow$ Lipschitz

Das zugehörige Anfangswertproblem mit Anfangswerten $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Lösung $y(t; t_0, y_0)$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt ist.

Satz: Die allgemeine Lösung der DGL (1) ist gegeben durch

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

wobei $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen, $y_h(t)$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist.

y_p
y_h

$$y_p' = A y_p + h$$
$$y_h' = A y_h$$
$$(y_p + y_h)' = A(y_p + y_h) + h$$

A linear

Nov 16-14:33

Die homogene Gleichung

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'(t) = A(t)y(t)$$
$$y(t_0) = y_0$$

Die Lösung $y(t; t_0, y_0)$ ist ein Element des **Vektorraums** $\mathbb{R}^n$.

Basisdarstellung:
Sei $v^1, \ldots, v^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$y(t; t_0, y_0) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t)v^k$$

mit der Anfangsbedingung:

$$y(t_0; t_0, y_0) = y_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha(t_0)v^k$$

Nov 16-14:36

Das Reduktionsverfahren:

Annahme: Es sei eine Lösung $\mathbf{y}^n(t)$ des gegebenen Systems bekannt.

Idee: Setze $\mathbf{y}^n(t)$ als letzte Spalte einer Fundamentalmatrix und reduziere damit die Dimension.

Ansatz: Suche neue Lösung in der Form

$$\mathbf{y}(t) = w_n(t)\mathbf{y}^n(t) + \mathbf{z}(t), \quad w_n(t) \in \mathbb{R}$$

unbek $w_n(t)$, $\mathbf{z}(t)$

$n+1$

wobei wir annehmen, dass $y_n^n(t) \neq 0$ gilt.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'(t) &= w_n'\mathbf{y}^n + w_n\frac{d}{dt}\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\ &= w_n'\mathbf{y}^n + w_n\mathbf{A}\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\ &= \mathbf{A}(w_n\mathbf{y}^n + \mathbf{z}) - \mathbf{A}\mathbf{z} + w_n'\mathbf{y}^n + \mathbf{z}' \\ &= \mathbf{A}\mathbf{y} + \underbrace{\mathbf{z}' - \mathbf{A}\mathbf{z} + w_n'\mathbf{y}^n}_{=0} \end{aligned}$$

Nov 16-15:25

Daraus folgt:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w_n'\mathbf{y}^n$$

d.h. unser Ansatz für $\mathbf{y}(t)$ ist eine Lösung, falls $\mathbf{z}(t)$ eine Lösung des linearen, inhomogenen Systems

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z} - w_n'\mathbf{y}^n$$

ist.

Die komponentenweise Darstellung dieses Systems lautet

Hom
$$z_i' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}z_k - w_n'y_i^n, \quad i = 1, \ldots, n$$

Wir haben noch die Freiheit $w_n(t)$ zu wählen: DGL für $z_n(t)$ ist

n-te

Hom

$$\begin{aligned} z_n' &= a_{n1}z_1 + \ldots + a_{nn}z_n - w_n'y_n^n \\ &= a_{nn}z_n \underbrace{- w_n'y_n^n + a_{n1}z_1 + \ldots + a_{n,n-1}z_{n-1}}_{=0} \end{aligned}$$

Nov 16-15:29

Wir setzen

$$w_n' = \frac{1}{y_n^n}(a_{n1}z_1 + \ldots + a_{n,n-1}z_{n-1})$$

Dann löst $z_n(t)$ die lineare, homogene Gleichung $z_n' = a_{nn}z_n$ und wir können die einfachste Lösung dieser Gleichung wählen, nämlich

$$z_n(t) = 0$$

Damit erhalten wir für $z_1, \ldots, z_{n-1}$ das reduzierte System:

unbek $z_1, \ldots, z_{n-1}$

w_n'

$$\begin{aligned} z_i' &= \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik}z_k - \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}z_k\right)\frac{y_i^n}{y_n^n} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(a_{ik} - a_{nk}\frac{y_i^n}{y_n^n}\right)z_k \\ &=: \sum_{k=1}^{n-1} b_{ik}z_k \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}' = B \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Nov 16-15:34

DGL1.pdf - Adobe Reader

Reduktionsverfahren:

$(A)_{ij} = a_{ij}$, $y^n = \begin{pmatrix} y_1^n \\ \vdots \\ y_n^n \end{pmatrix}$

1) Man setze:

$$b_{ik} := a_{ik} - a_{nk}\frac{y_i^n}{y_n^n}, \quad i, k = 1, \ldots, n-1$$

2) Man bestimme die (allgemeine) Lösung des Systems

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{n-1}$$

$z_n = 0$

3) Zu jeder Lösung $\mathbf{z}(t) \neq 0$ ist dann

$$\mathbf{y}(t) := w_n(t)\mathbf{y}^n(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$w_n(t) := \int_{t_0}^{t} \underbrace{\left(\frac{1}{y_n^n(\tau)}\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(\tau)z_k(\tau)\right)}_{w_n'} d\tau$$

eine von $\mathbf{y}^n(t)$ linear unabhängige Lösung.

Nov 16-15:36

Bespiel: Der Vektor $\mathbf{y}^2(t) = (t, 1)^T$ ist eine Lösung von

$n=2$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Anwendung des Reduktionsverfahrens: $A(t)$

$$b_{11} = a_{11} - a_{21}\frac{y_1}{y_2} = 0 - (-1)\frac{t}{1} = t$$

$B(t) = t$

Daraus folgt die Gleichung $z' = tz$ mit der Lösung $z(t) = e^{t^2/2} \Rightarrow$

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} a_{21}\frac{z}{y_2}d\tau = -\int_{t_0}^{t} e^{\tau^2/2}d\tau$$

$w'(t) = a_{21}\frac{z}{y_2}$

$$\mathbf{y}^1(t) = w(t) \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fundamentalsystem: $\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{y}^1(t), \mathbf{y}^2(t))$.

Nov 16-15:39

Idee:

Betrachte die folgenden n Anfangswertprobleme ($k = 1, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{y}^k(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}^k(t) \\ \mathbf{y}^k(t_0) &= \mathbf{y}^k \end{aligned}$$

(nicht y_0)

Definiere die **Fundamentalmatrix** bzw. das **Fundamentalsystem**

$$\mathbf{Y}(t) := (\mathbf{y}^1(t), \ldots, \mathbf{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$Y(t_0) = (v^1, v^2, \ldots, v^n)$

Satz: Die Matrix $\mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ sei ein (beliebiges) Fundamentalsystem. Dann gilt:

1) Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t) \cdot \mathbf{c} = \sum_{k=1}^{n} c_k\mathbf{y}^k(t), \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$$

2) Die Fundamentalmatrix ist für alle $t \in \mathbb{R}$ regulär.

$Y(t_0) = (v^1, \ldots, v^n)$ regulär

Nov 16-14:40