Vo Dgl 23.11.09

$$\dot y(t) = f(y(t),t)$$
$$y(t_0) = y_0 \qquad \text{AWP}$$

i.a. nicht explizit lösbar

$$\dot y(t) = A(t)\,y(t) + h(t)$$

Idee: man suche $Y(t)$ FS $n\times n$ Mat.

$$\Rightarrow y_h(t) = Y(t)\,(Y(t_0))^{-1}y_0$$
$$y_p(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t}(Y(\tau))^{-1}h(\tau)\,d\tau$$
$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Problem: Konstr. $Y(t)$

Nov 23-14:29

3x3 Matrizen

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$$
$$\boxed{\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{pmatrix}}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

i.a. $\frac{d}{dt}y = Ay$,

$J = S^{-1}AS$, $SJS^{-1} = A$

$S^{-1} \,|\, \frac{d}{dt}y = SJS^{-1}y$

$$S^{-1}\frac{d}{dt}y = \boxed{\frac{d}{dt}\underbrace{(S^{-1}y)}_{z} = J\underbrace{(S^{-1}y)}_{z}}$$

•) $\dot z_3 = \lambda z_3$, $z_3(t) = a_3e^{\lambda t}$

•) $\boxed{\dot z_2 = \lambda z_2 + z_3 = \lambda z_2 + a_3e^{\lambda t}}$

$z_{2h} = a_2e^{\lambda t}$

$z_{2p} = a_2(t)e^{\lambda t}$ (Var. d. Konst.)

$\dot a_2\cancel{e^{\lambda t}} + \cancel{a_2\lambda e^{\lambda t}} = \cancel{\lambda a_2e^{\lambda t}} + a_3\cancel{e^{\lambda t}}$

$\dot a_2 = a_3 \Rightarrow a_2 = ta_3$

$z_{2p} = ta_3e^{\lambda t}$

•) $\boxed{\dot z_1 = \lambda z_1 + z_2 = \lambda z_1 + a_2e^{\lambda t} + ta_3e^{\lambda t}}$

$z_{1h} = a_1e^{\lambda t}$

$z_{1p} = a_1(t)e^{\lambda t}$

.... $\dot a_1 = a_2 + ta_3 \Rightarrow a_1 = ta_2 + \frac{t^2}{2}a_3$

$z_1(t) = a_1e^{\lambda t} + ta_2e^{\lambda t} + a_3\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}$

•) $$z(t) = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1e^{\lambda t} + ta_2e^{\lambda t} + \frac{t^2}{2}a_3e^{\lambda t}\\ a_2e^{\lambda t} + ta_3e^{\lambda t}\\ a_3e^{\lambda t}\end{pmatrix} =$$
$$= a_1e^{\lambda t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_2e^{\lambda t}\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} + a_3e^{\lambda t}\begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}\\t\\1\end{pmatrix} =$$
$$= e^{\lambda t}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}\\t\\1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

$$(J-\lambda I) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (J-\lambda I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \qquad (J-\lambda I)\begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix} \neq 0$$

Nov 23-15:10

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von $\mathbf{A}$ lautet:

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3) = (1-\lambda)^3$$

Der Wert $\lambda = 1$ ist also ein dreifacher Eigenwert.

Eigenvektoren: $(A-\lambda I)v^1 = (A-I)v^1 = 0$

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^1\\v_2^1\\v_3^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}$$

Da rang $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3) = 2$ gilt, ist die geometrische Vielfachheit $g(\lambda) = 1$.

$$(A-\lambda I)v^2 = v^1 = \begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix}$$

Nov 23-15:38

Hauptvektoren:

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^2\\v_2^2\\v_3^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix}$$

$(A-\lambda I)v^3 = v^2$

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^3\\v_2^3\\v_3^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-4\\8\end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}^3 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

Ein Fundamentalsystem ist daher gegeben durch:

$$\mathbf{y}^1(t) = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}16\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{y}^2(t) = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}16t\\-4\\8\end{pmatrix},\ \mathbf{y}^3(t) = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}8t^2\\-4t+1\\8t+2\end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 8 & 2\end{pmatrix}, \quad Sz = \begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 1\\ 0 & 8 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}t\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}\\t\\1\end{pmatrix}\right)$$

Nov 23-15:41

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung des Systems

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

Wieder ist $\lambda = 1$ dreifacher Eigenwert von $\mathbf{A}$, aber es gilt $g(\lambda) = 2$.

Es existieren also **zwei** linear unabhängige Eigenvektoren:

$$A-\lambda I\,v = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_3)^2 = 0$$

Wir suchen daher einen zu $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$ linear unabhängigen Vektor $\mathbf{v}^{22}$ (Hauptvektor der Stufe 1).

$$(A-\lambda I)v^{22} = v^2$$

Nov 23-15:42

Ein System der Form

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & 0\\ & \lambda_1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_r\end{pmatrix}$$

kann explizit gelöst werden.

Ein Fundamentalsystem für (2) ist gegeben durch

$$e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}t/1!\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}t^2/2!\\t/1!\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}t^{r-1}/(r-1)!\\\vdots\\\vdots\\t/1!\\1\end{pmatrix}$$

Dieses System entsteht mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n$.

$$z = S^{-1}y \iff y = Sz$$

Nov 23-15:28

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

$(A-\lambda I)v^1 = 0 \Rightarrow EV\ v^1$

$(A-\lambda I)v^2 = v^1 \Rightarrow HV\ v^2$

Jordansche Normalform

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$$

Transformationsmatrix $\mathbf{S}$ besteht aus Eigen– und Hauptvektoren

$$\mathbf{S} = (\underbrace{\mathbf{v}^{11}}_{EV}, \ldots, \mathbf{v}^{1r_1} \mid \underbrace{\mathbf{v}^{21}}_{EV}, \ldots, \mathbf{v}^{2r_2} \mid \ldots \mid \underbrace{\mathbf{v}^{m1}}_{EV}, \ldots, \mathbf{v}^{mr_m})$$

$\mathbf{v}^{j1}$: Eigenvektor zum Eigenwert λ_j, $j = 1, \ldots, m$

$\mathbf{v}^{jk}$: Hauptvektor der Stufe $(k-1)$, $k = 2, \ldots, r_j$

$(\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}_n)\mathbf{v}_{jk} = \mathbf{v}_{j,k-1}, k = 2, \ldots, r_j$

Wir setzen nun $\mathbf{z}(t) := \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}(t)$. Dann gilt

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}'(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}\,\mathbf{z}(t)$$

$$\Rightarrow \mathbf{z}'(t) = \mathbf{J}\,\mathbf{z}(t)$$

Ein Fundamentalsystem für $z' = \mathbf{J}\,z$ haben wir bereits berechnet.

$y = Sz$

Nov 23-15:32

Rücktransformation ergibt ein Fundamentalsystem für $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}$.

Für ein einzelnes Jordan–Kästchen ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{y}^{11}(t) &= e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^{11} \\ \mathbf{y}^{12}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t}{1!}\mathbf{v}^{11} + \mathbf{v}^{12}\right) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{1r}(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\mathbf{v}^{11} + \ldots + \frac{t}{1!}\mathbf{v}^{1,r-1} + \mathbf{v}^{1r}\right) \end{aligned}\right\} y = Sz$$

Vorgehen zur Bestimmung der Lösung:

1) Bestimmung der Eigenwerte, Eigen– und Hauptvektoren,
2) Berechnung der Lösungen nach obiger Formel,
3) Zusammenfügen dieser Einzelmatrizen zur Fundamentalmatrix.

Nov 23-15:33

Fall 1: Alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von $\mathbf{A}$ sind reell und es existiert eine Basis aus reellen Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$.

$\lambda_i, v_i \Rightarrow e^{\lambda_i t} v_i$

$(v_1, \ldots, v_n)$

Dann ist eine Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$Y(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{R}$$

Beispiel: (Vorbereitung auf Fall 2)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \stackrel{!}{=} 0$

Wir betrachten das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\det Y(t) = \det(e^{\lambda_1 t}v^1, \ldots, e^{\lambda_n t}v^n) = e^{\lambda_1 t} \cdot e^{\lambda_2 t} \cdots e^{\lambda_n t} \det(v^1, \ldots, v^n) \neq$

Nov 23-14:51

Fall 2: Die Systemmatrix $\mathbf{A}$ ist **diagonalisierbar**

Dann existiert eine Basis des $\mathbb{C}^n$ aus (komplexen) Eigenvektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$. Die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ müssen weder reell noch einfach sein.

Ein komplexes Fundamentalsystem (für $\mathbb{C}^n$) ist gegeben durch

$$\mathbf{Y}(t) = (e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}^1, \ldots, e^{\lambda_n t}\mathbf{v}^n)$$

Die allgemeine, **komplexwertige** Lösung des homogenen Systems mit konstanten **reellen** Koeffizienten lautet:

$$\mathbf{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, e^{\lambda_k t}\,\mathbf{v}^k, \qquad c_k \in \mathbb{C}$$

Bemerkung: Jede **normale** und damit jede **symmetrische** Matrix ist diagonalisierbar (Lineare Algebra).

Normale Matrix bedeutet, dass $\bar{A}^T A = A\bar{A}^T$ gilt.

Falls A reell $A = \bar{A}$. $Av = \lambda v$

$\overline{Av} = \bar{A}\bar{v} = A\bar{v} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda}\bar{v}$

Nov 23-14:57

$\overline{(e^{\lambda t})} = e^{\bar{\lambda} t} = 1 + (\bar{\lambda} t) + \frac{(\bar{\lambda} t)^2}{2} + \ldots$

Frage: Ist es möglich, ein reelles Fundamentalsystem anzugeben?

Lineare Algebra:

Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist auch $\bar{\lambda}$ (konjugiert–komplex) ein Eigenwert.

Dementsprechend ist $\bar{\mathbf{v}}$ ein Eigenvektor, falls $\mathbf{v}$ ein Eigenvektor ist.

Also: Nichtreelle Eigenwerte und –vektoren treten stets paarweise auf.

Ersetze jedes komplexwertige Paar

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= e^{\lambda t}\mathbf{v} \\ \mathbf{y}^2(t) &= e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}} \end{aligned}$$

$\overline{e^{\lambda t} v} = e^{\bar{\lambda} t}\bar{v}$

durch

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \text{Re}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} + e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \\ \mathbf{y}^2(t) &= \text{Im}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v} - e^{\bar{\lambda} t}\bar{\mathbf{v}}\right) \end{aligned}$$

Nov 23-15:01

Aus den beiden komplexen Vektoren

$$\mathbf{z}^1(t) = e^{(1+2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} \qquad \mathbf{z}^2(t) = e^{(1-2i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$$

$Y(t) = (z^1(t), z^2(t)) \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

berechnet man die beiden reellen Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^1(t) &= \text{Re}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) = \text{Re}\left(e^t e^{2it}\begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}\right) = \\ \mathbf{y}^2(t) &= \text{Im}\left(\mathbf{z}^1(t)\right) \end{aligned}$$

$= \begin{pmatrix} e^t \cos 2t \\ e^t\, 2\sin 2t \end{pmatrix}$

also

$$\mathbf{y}^1(t) = e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ 2\sin(2t) \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}^2(t) = e^t\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Damit lautet die allgemeine, **reelle** Lösung des Systems

$$\mathbf{y}_h(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix} c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) \\ 2c_1\sin(2t) - 2c_2\cos(2t) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^t\begin{pmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) \\ 2\sin(2t) & -2\cos(2t) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2\times 2}}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Nov 23-15:07