Dgl I 30.11.09

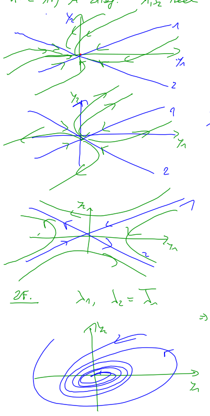
Lin. $y' = A(t)y + h(t)$

Lin. (Spezialfall)

$y' = Ay + h(t)$

$n=2$ 1F) A diag. λ_1, λ_2 reel

$y' = Ay$



$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

$\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 > 0$

2F. $\lambda_1,\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1$

$\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}\lambda_2 = \operatorname{Re}\lambda_1$

Nov 30-14:15

$L[y](t) = y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = h(t)$

$y = y_1$

$\dot{y}_1 = y_2$

$\dot{y}_2 = -a_0 y_1 - a_1 y_2 + h$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix}$$

Nov 30-14:34

3.3 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gegeben sei eine skalare, lineare Differentialgleichung n–ter Ordnung:

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = h(t)$$

wobei $a_k(t)$, $k = 0, \ldots, n-1$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ seien.

Gleichungen dieser Bauart lassen sich stets als lineare Differentialgleichungssysteme

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}}_{n \times n}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \\ h \end{pmatrix}$$

mit

$$y_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

schreiben.

$A = A(t)$

Nov 30-14:37

$$\operatorname{Spur} A(t) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & & 1 \\ -a_0 & & & -a_{n-1} \end{pmatrix} = -a_{n-1}$$

Bemerkung:

1) Ist $W(t_0) \neq 0$, so gilt auch für alle $t \in \mathbb{R}$: $W(t) \neq 0$

2) Die Funktion $W(t)$ genügt der Differentialgleichung

$$W'(t) = -a_{n-1}(t)W(t) = \operatorname{Spur} A(t)\, W(t)$$

und daher folgt direkt

$$W(t) = W(t_0) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)d\tau\right)$$

Sei $C(t)$ die zugehörige Koeffizientenmatrix wie in (3). Dann gilt

$$\det C(t) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}(t) = -a_{n-1}(t)$$

Nov 30-14:42

Bemerkung: (Fortsetzung)

3) Ein Fundamentalsystem $(y_1, \ldots, y_n)$ läßt sich durch Lösung der folgenden n Anfangswertaufgaben ($k = 1, \ldots, n$) bestimmen:

$$\begin{aligned} L[y_k] &= 0 \\ y_k^{(i)}(0) &= \begin{cases} 0 & : \ i \neq k-1 \\ 1 & : \ i = k-1 \end{cases} \qquad (i = 0, \ldots, n-1) \end{aligned}$$

$$y_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$y_i(0) = e_i$

4) Ist $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)}$$

wobei $y_p(t)$ eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist.

Nov 30-14:46

Das Reduktionsverfahren

Sei $u(t) \neq 0$ eine Lösung der homogenen Gleichung $L[y] = 0$.

Produktansatz:

Wir suchen eine weitere (linear unabhängige) Lösung in der Form

$$\boxed{y(t) = u(t)z(t)}$$

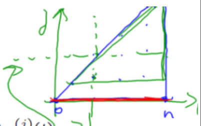
Die ersten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} y'(t) &= u'(t)z(t) + u(t)z'(t) \\ y''(t) &= u''(t)z(t) + 2u'(t)z'(t) + u(t)z''(t) \end{aligned}$$

Allgemein gilt dann:

$$y^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t)$$

Nov 30-14:48



Einsetzen in $L[y] = 0$ ergibt:

$$
\begin{aligned}
L[y] &= \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t) \\
&= \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{n} a_k \overbrace{\binom{k}{0}}^{1} u^{(k)}(t)\right]}_{=0} z + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\, z^{(j)}(t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} b_j\, z^{(j)}(t)
\end{aligned}
$$

$L[u] = 0$

$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} u^{(k-j)}(t)\right)}_{} z^{(j)}(t)$

Setzt man $w(t) := z'(t)$, so folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0$$

Dies ist eine homogene Differentialgleichung der Ordnung $n-1$.

Nov 30-14:56

Ist $w_1, \ldots, w_{n-1}$ ein Fundamentalsystem von

$$\sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} w^{(j)}(t) = 0$$

so setzen wir

$$z_k(t) = \int_{t_0}^{t} w_k(\tau)\, d\tau, \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Mit dem ursprünglichen Ansatz ist dann die Funktionenmenge

$$(u, z_1 \cdot u, \ldots, z_{n-1} \cdot u)$$

ein Fundamentalsystem das Ausgangsgleichung, also $L[y] = 0$ mit

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t) y(t) = 0$$

Nov 30-14:58

$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = h$

$L[u] = 0$

$y = u \cdot z$

$y' = u'z + uz'$

$y'' = u''z + 2u'z' + uz''$

$u''z + 2u'z' + uz'' + a_1(u'z + uz') + a_0(uz) \overset{!}{=} 0$

$z''u + z'(2u' + a_1 u) + z\underbrace{(u'' + a_1 u' + a_0 u)}_{L[u]=0} = 0$

$z' = w$

$w'u + w(2u' + a_1 u) = 0$

$d\ln|w| = \frac{dw}{w} = -\frac{2u' + a_1 u}{u}\, dt = d\ln\frac{1}{u^2} - a_1\, dt$

$w = \frac{1}{u^2} e^{\int a_1 dt}$

$z = \int w\, dt = \int \frac{1}{u^2} e^{\int a_1 d\tau}\, dt$

$y = u \cdot z$

Bspl $y'' + ty' + y = 0 \Rightarrow a_1 = t$ $(a_0 = 1)$

Nov 30-14:58

Beispiel:

Die Differentialgleichung $y'' + ty' + y = 0$ besitzt die Lösung

$$u(t) = e^{-t^2/2}$$

Unser Ansatz $y = u \cdot z$ liefert:

$$
\begin{aligned}
y' &= u' \cdot z + u \cdot z' \\
y'' &= u'' \cdot z + 2u' \cdot z' + u \cdot z''
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt:

$$
\begin{aligned}
y'' + ty' + y &= \cancel{u''z} + 2u'z' + uz'' + t(\cancel{u'z} + uz') + \cancel{uz} \\
&= 2u'z' + uz'' + tuz'
\end{aligned}
$$

Wir setzen $w = z'$ und erhalten für w die Gleichung erster Ordnung

$$uw' + (2u' + tu)w = 0 \quad \Rightarrow \quad w' = -\frac{2u' + tu}{u} w$$

Nov 30-15:07

$y_p(t) = Y(t)\, c(t)$

$y_p'(t) = Y'(t)\cancel{c(t)} + \boxed{Y(t)\, c'(t)} = \cancel{A(t)Y(t)c(t)} + \boxed{h(t)}$

Die inhomogene Differentialgleichung

Ist das Funktionensystem $(y_1, \ldots, y_n)$ ein Fundamentalsystem, so ist die Matrix

$$\mathrm{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \ldots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix des zugehörigen Systems erster Ordnung.

Die Methode der Variation der Konstanten ergibt dann das lineare Differentialgleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(0)} & \ldots & y_n^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$$

Nov 30-15:11

Die Methode der Greenschen Funktion/Grundlösungsverfahren

Gegeben sei die inhomogene Gleichung n–ter Ordnung mit **konstanten Koeffizienten**

$$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = h(t)$$

Satz:

Sei $w(t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$L[w] = 0, \quad w^{(k)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : \; k = 0, \ldots, n-2 \\ 1 & : \; k = n-1 \end{cases}$$

Dann ist eine spezielle Lösung $y_p(t)$ der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$
\begin{aligned}
y_p(t) &= \int_{t_0}^{t} G(t,\tau) h(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} w(t - \tau + t_0) h(\tau)\, d\tau \\
G(t,\tau) &= w(t - \tau + t_0)
\end{aligned}
$$

Nov 30-15:14

Green

$L[y] = y'' + a_1 y' + a_0 y = h(t)$

Suche w, $\boxed{L(w) = 0 \quad w(t_0) = 0 \quad w'(t_0) = 1}$

$\Longrightarrow \quad y_p(t) = \int_{t_0}^{t} w(t - \tau + t_0)\, h(\tau)\, d\tau$

$y_p' = \int_{t_0}^{t} w'(t - \tau + t_0)\, h(\sigma)\, d\sigma + \underbrace{w(t_0)}_{=0} h(t)$

$y_p'' = \int_{t_0}^{t} w''(t - \tau + t_0)\, h(\sigma)\, d\sigma + \underbrace{w'(t_0)}_{=1} h(t) + \underbrace{w(t_0)}_{=0} h'(t)$

$\int_{t_0}^{t} \underbrace{(w'' + a_1 w' + a_0 w)}_{L[w]=0} h(\sigma)\, d\sigma + h(t) \quad \Rightarrow \quad L[y_p] = h(t)$

Nov 30-15:15

Klicken Sie mit der Maus, um zur nächsten Seite im Dokument zu wechseln.

$L[y] = L[y_1 + y_2] =$

lin. $= L[y_1] + L[y_2]$

$= h_1 + h_2$

Das Superpositionsprinzip

Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

(5) $$L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y_1] = h_1(t)$ und $L[y_2] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (5).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$h(t) = \text{Re}\,(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \text{Im}\,(w(t))$$

und ist $z(t)$ eine (komplexe) Lösung von $L[z] = w$, so ist

$$y(t) = \text{Re}\,(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \text{Im}\,(z(t))$$

eine (reelle) Lösung von der DGL $L[y] = h(t)$.

Nov 30-15:44