$L[y] := y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = h(t)$

Spezieller Ansatz bei spezieller Inhomogenität

Bei Inhomogenitäten der Form

$$h(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \beta_j t^j$$

kann man spezielle Ansätze zur Bestimmung von $y_p(t)$ verwenden:

1) Ist μ keine Nullstelle der charakteristischen Gleichung $p(\lambda)$:

$$y_p(t) = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

mit den freien Parametern γ_j

2) Ist μ eine r–fache Nullstelle von $p(\lambda)$:

$$y_p(t) = e^{\mu t} t^r \sum_{j=0}^{m} \gamma_j t^j$$

Beispiel: Wir betrachten die Gleichung

$$y'' - y = te^t$$

Die charakteristische Gleichung ist $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0$ und $\mu = 1$ ist eine **einfache** Nullstelle.
Ansatz:

$$y_p(t) = e^t(\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)$$

Einsetzen in die DGL ergibt

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + (\gamma_0 + 4\gamma_1)t + \gamma_1 t^2)e^t - (\gamma_0 t + \gamma_1 t^2)e^t = te^t$$

Umsortieren:

$$(2(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\gamma_1 t)e^t = te^t$$

Daraus folgt $\gamma_0 = -\gamma_1 = -1/4$ und

$$y_p(t) = \frac{t}{4}(t-1)e^t$$

Das Superpositionsprinzip

Gegeben sei eine inhomogene DGL der Form

(5) $$L[y] = h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

Sind $y_1(t)$ und $y_2(t)$ spezielle Lösungen von $L[y] = h_1(t)$ und $L[y] = h_2(t)$, so ist $y_p(t) := y_1(t) + y_2(t)$ eine spezielle Lösung von (5).

Komplexe Differentialgleichungen

Ist $h(t)$ der Real– oder Imaginärteil einer komplexwertigen Funktion $w(t)$,

$$h(t) = \mathrm{Re}\,(w(t)) \quad \text{bzw.} \quad h(t) = \mathrm{Im}\,(w(t))$$

und ist $z(t)$ eine (komplexe) Lösung von $L[z] = w$, so ist

$$y(t) = \mathrm{Re}\,(z(t)) \quad \text{bzw.} \quad y(t) = \mathrm{Im}\,(z(t))$$

eine (reelle) Lösung von der DGL $L[y] = h(t)$.

Beispiel:

Ein spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-t}(\cos t + \sin(2t))$$

ist gegeben durch

$$y_p(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos t - \frac{1}{4}t\cos(2t)\right)$$

1) Beim Superpositionsprinzip betrachtet man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\cos t \\ y'' + 2y' + 5y &= e^{-t}\sin(2t) \end{aligned}$$

2) Beide Gleichungen löst man durch Übergang auf komplexe Zahlen:

$$\begin{aligned} z'' + 2z' + 5z &= e^{(-1+i)t} \\ z'' + 2z' + 5z &= e^{(-1+2i)t} \end{aligned}$$

3.5 Stabilität

Gegeben sei eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)), \qquad \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^n$$

mit hinreichend glatter rechten Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$.

Weiter sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine spezielle Lösung.

Frage: Wie verhalten sich **benachbarte** Lösungen $\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0)$?

Beispiel: Wir betrachten die beiden Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} y'(t) &= \pm y(t) \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Lösung $y^*(t) = 0$.

Lösungen $y(t; 0, y_0)$ mit der Anfangsbedingung $y_0 \neq 0$ sind:

$$y(t) = y_0 e^t \to \pm\infty \qquad y(t) = y_0 e^{-t} \to 0 \qquad \text{für} \quad t \to \infty$$

$n = 1$

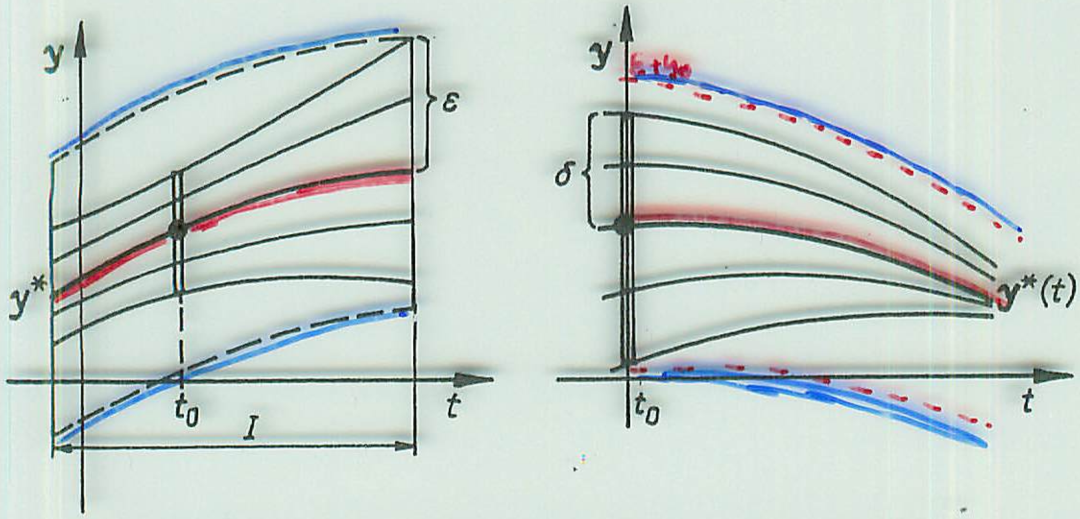


Abb. 22.2. Stabilität und asymptotische Stabilität

$n = 2$

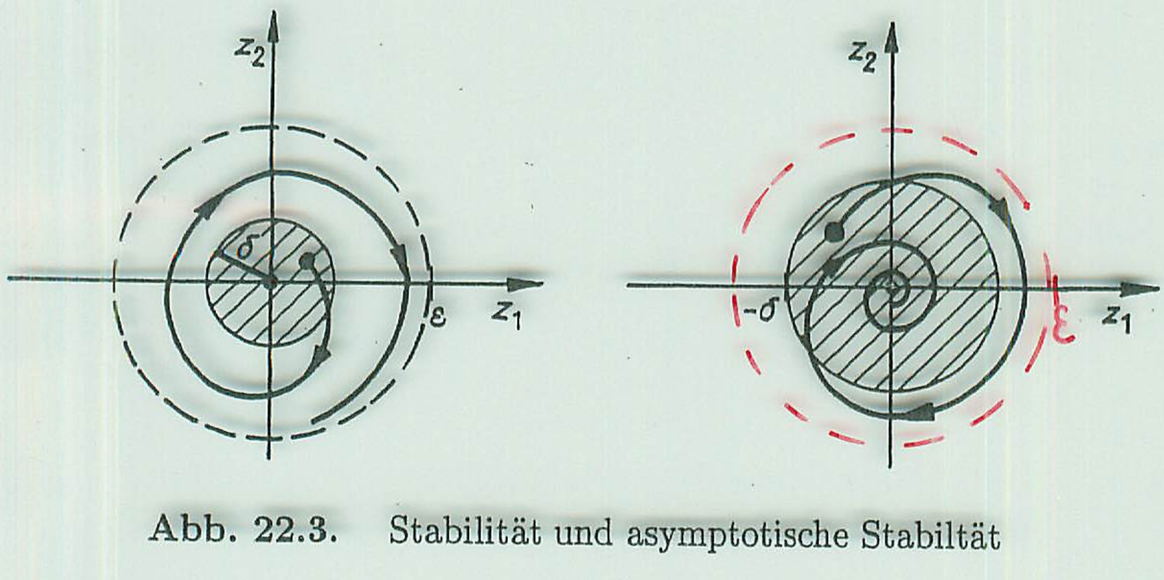


Abb. 22.3. Stabilität und asymptotische Stabiltät

Definition:

1) Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **stabil** auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$, falls es zu $t_0 \in I$ und $\varepsilon > 0$ stets ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\forall\, \mathbf{y}_0 \;:\; \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t)\| < \varepsilon \; (\forall\, t \in I)$$

Kann man δ unabhängig von t_0 wählen, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ **gleichmäßig stabil** auf I.

2) Ist die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ auf einem Intervall $[a, \infty)$ erklärt, so heißt $\mathbf{y}^*(t)$ dort **asymptotisch stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ dort stabil ist und es zu $t_0 \geq a$ ein $\delta(t_0) > 0$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall\, \mathbf{y}_0 \;:\; \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^*(t_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t; t_0, \mathbf{y}_0) - \mathbf{y}^*(t_0)\| = 0$$

Die Lösung $\mathbf{y}^*(t)$ heißt **strikt stabil**, falls $\mathbf{y}^*(t)$ gleichmäßig und asymptotisch stabil ist.

Bemerkung:

Sei $\mathbf{y}^*(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))$$

Setzen wir

$$\mathbf{z}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^*(t) \quad \Leftrightarrow y(t) = z(t) + y^*(t)$$

so erfüllt $\mathbf{z}(t)$ die Differentialgleichung

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}(t, \overbrace{\mathbf{z}(t) + \mathbf{y}^*(t)}^{y(t)}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) =: \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t))$$

Gleichzeitig ist $\mathbf{z}^*(t) = \mathbf{0}$ eine Lösung von

(8) $$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{f}^*(t, \mathbf{z}(t)) \quad , \text{d.h. es gilt } f^*(t, z^*) = 0.$$

Statt der Stabilität von $\mathbf{y}^*(t)$ können wir also auch die Stabilität der Nulllösung von (8) untersuchen.

z^* wird als <u>Gleichgewichtspunkt</u> bezeichnet, denn er bleibt wegen $z^{*\prime} = f^*(t, z^*) = 0$ stationär.

Stabilität bei linearen Differentialgleichungen

Für ein lineares Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) \qquad a \le t < \infty$$

mit stetiger Matrix $\mathbf{A}(t) \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ bezeichne $\mathbf{Y}(t)$ ein beliebiges Fundamentalsystem.

Satz: (Stabilitätssatz I)

1) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann stabil auf dem Intervall $[a, \infty)$, falls das Fundamentalsystem $\mathbf{Y}(t)$ auf I beschränkt ist.

2) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann gleichmäßig stabil auf I, falls es eine Konstante $M > 0$ gibt mit

$$\forall t \ge t_0 \ge a \quad : \quad \|\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}(t_0)^{-1}\| \le M$$

3) Die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, falls gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{Y}(t)\| = 0$$

Satz: Sei $\lambda(t)$ der größte Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)^T$. Gilt

$$\int_{t_0}^{\infty} \lambda(t)dt = -\infty$$

so folgt $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{y}(t) = 0$ für jede Lösung $\mathbf{y}(t)$, d.h. $\mathbf{y}^*(t) = 0$ ist asymptotisch stabil.

Beweis: Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{y}\|^2 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{y}^T\mathbf{y}) = (\mathbf{A}\mathbf{y})^T\mathbf{y} + \mathbf{y}^T(\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T(\mathbf{A}^T + \mathbf{A})\mathbf{y} \\ &\leq \lambda(t)(\mathbf{y}^t\mathbf{y}) = \lambda(t)\cdot\|\mathbf{y}\|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Integration

$$\|\mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{y}_0\|^2 \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} \lambda(\tau)d\tau\right)$$

Satz: **(Stabilitätssatz II)**

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ konstante Matrix. Die Nulllösung $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ist genau dann

(asymptotisch)

1) ~~**strikt**~~ **stabil**, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt: $\mathrm{Re}\,(\lambda_j) < 0$.

2) **gleichmäßig stabil**, falls für alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j) \le 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{Re}\,(\lambda_j) = 0 \Rightarrow g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$$

3) In allen anderen Fällen ist die Nulllösung $\mathbf{y}^*(t) = 0$ instabil.

Beispiel: Die Nulllösung des Systems mit Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

ist instabil.

Eigenwerte sind $\lambda_1 = -4$ und $\lambda_2 = 0$, aber $g(\lambda_2) = 1 < a(\lambda_2) = 2$.

Beispiel: Wir betrachten das DGL–System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Gleichgewichtspunkt ist Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daher $\mathbf{y}^* = (3, -2)^T$.

Die Transformation $\mathbf{z} := \mathbf{y} - \mathbf{y}^*$ liefert das homogene Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{z}' = \mathbf{A}\mathbf{z}$$

und die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

Damit ist $\mathbf{y}^*$ strikt stabil.

Satz: (Kriterium von Routh und Hurwitz)

Gegeben sei das reelle Polynom

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \qquad a_n > 0$$

Dann sind äquivalent:

1) Alle Nullstellen von $p(z)$ haben negativen Realtiel.

2) Es gilt $a_k > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Ferner sind alle Hauptunterdeterminanten der folgenden (n, n)–Matrix positiv:

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Dabei sei $a_k := 0$ für alle $k > n$.

z.B.: $n=3$ $\quad H = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$

Beispiel: Gegeben sei das Polynom mit strikt positiven Koeffizienten

$$p(z) = 2z^3 + 4z^2 + 5z + 6$$

Wir stellen zunächst die $(3,3)$–Matrix $\mathbb{H}$ auf:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptunterdeterminaten sind $\det \mathbb{H}_1 = |5| = 5$ sowie

$$\det \mathbb{H}_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\det \mathbb{H}_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16$$

Also besitzen alle Nullstellen von $p(z)$ einen negativen Realteil.

Qualitatives Verhalten für $n=2$

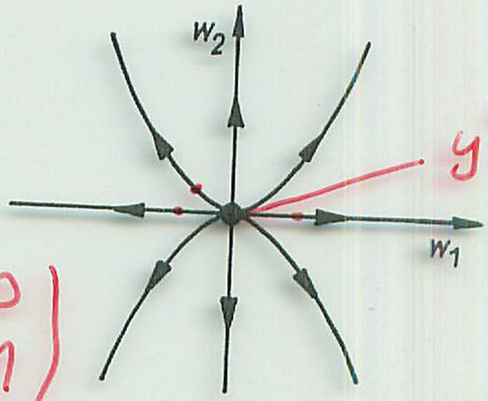
140 a)

1. $\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$w_j(t) \;=\; w_{j_0}\, e^{\lambda_j t}$$

0 ist instabiler Knotenpunkt 2. Art.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



$y^* = 0$

$\lambda_2 > \lambda_1$

Abb. 22.4. Instabiler Knoten 2. Art

2. $\lambda_1, \lambda_2 < 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$w_j(t) \;=\; w_{j_0}\, e^{\lambda_j t}$$

0 ist asymptotisch stabiler Knotenpunkt 2. Art.

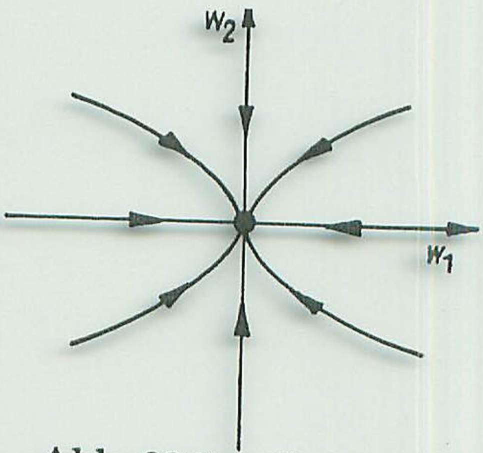


Abb. 22.5. Stabiler Knoten

140 b)

3. $\lambda_1 = \lambda_2 > 0, \quad g(\lambda_1) = 2$
0 ist instabiler Knotenpunkt 1. Art.

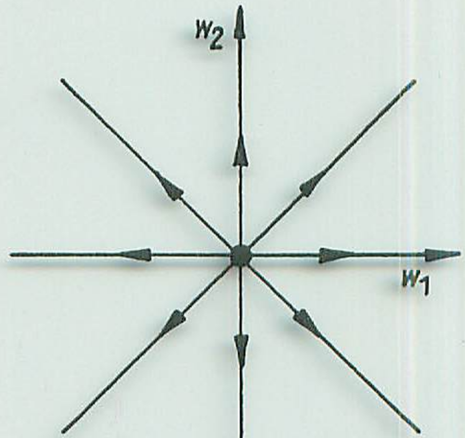


Abb. 22.6. Instabiler Knoten

4. $\lambda_1 = \lambda_2 < 0, \quad g(\lambda_1) = 2$
0 ist asymptotisch stabiler Knotenpunkt 1. Art.

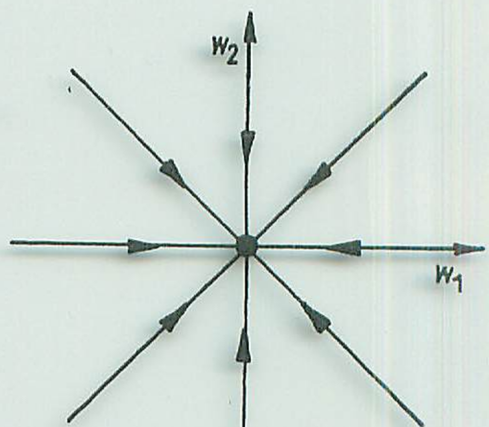


Abb. 22.7. Stabiler Knoten

140 c)

5. $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
   0 ist **instabiler Sattelpunkt**.

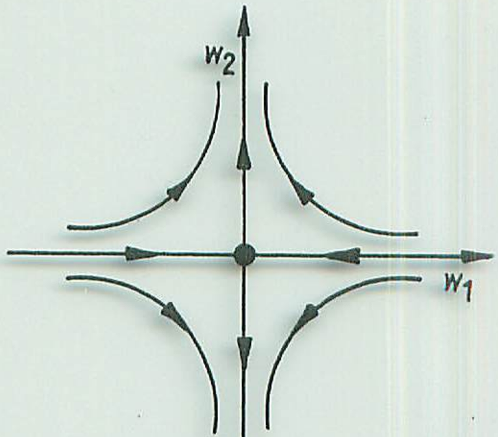


Abb. 22.8. Instabiler Sattel

6. $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \neq 0$
   0 ist kein isolierter stationärer Punkt!
   0 ist **instabil** für $\lambda_2 > 0$ und **stabil** für $\lambda_2 \leq 0$.

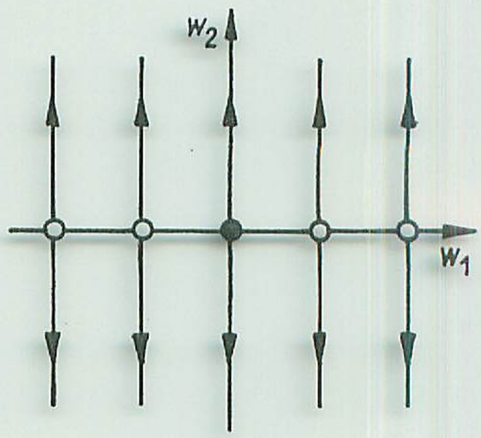


Abb. 22.9. Parallele Geraden

$$y(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

140d)

7. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad g(\lambda) = 1$

$$\begin{aligned} w_1(t) &= (w_{10} + w_{20}t)\,\mathrm{e}^{\lambda t} \\ w_2(t) &= w_{20}\,\mathrm{e}^{\lambda t} \end{aligned}$$

0 ist **Knotenpunkt 3. Art**,
für $\lambda > 0$ ist **0 instabil**, für $\lambda < 0$ ist **0 asymptotisch stabil**.

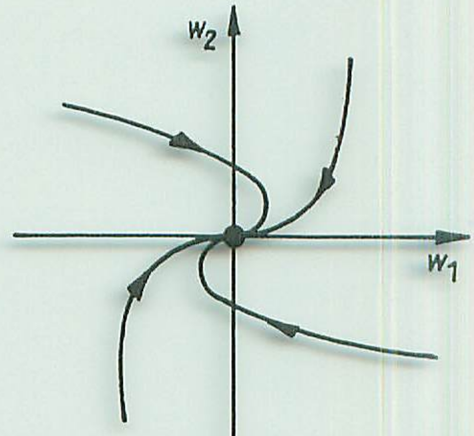


Abb. 22.10. Knotenpunkt 3. Art

8. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0, \quad \alpha < 0$
0 ist **asymptotisch stabiler Strudelpunkt**.

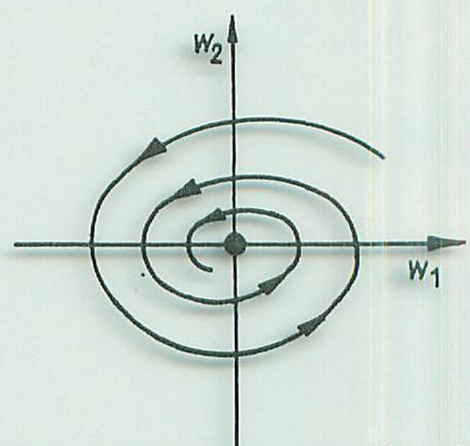


Abb. 22.11. Stabiler Strudelpunkt

140e)

9. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha + i\beta, \beta \neq 0, \quad \alpha > 0$
0 ist instabiler Strudelpunkt.

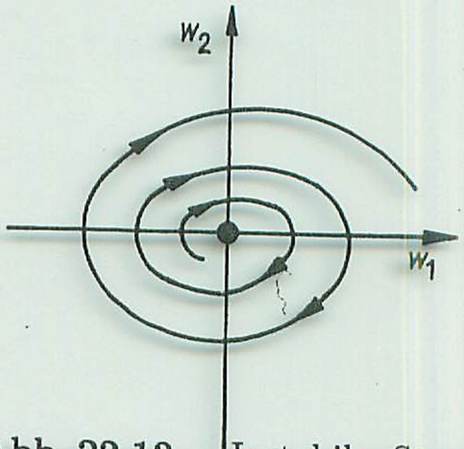


Abb. 22.12. Instabiler Strudelpunkt

10. $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = i\beta, \quad \beta \neq 0$
0 ist stabiler Wirbelpunkt (Zentrum).

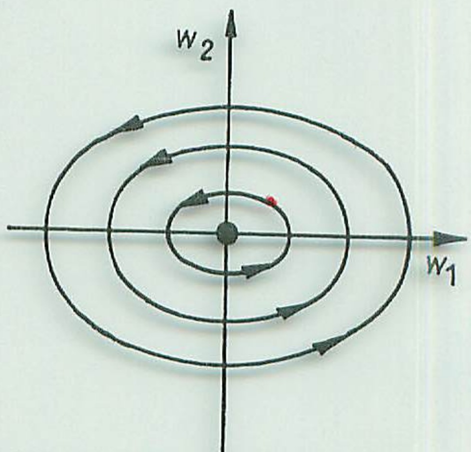


Abb. 22.13. Stabiler Wirbelpunkt