Vo Dgl 14.12.09

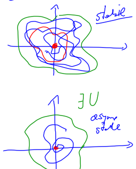
$\boxed{y' = f(y,t)}$

Lsg $y^* = y^*(t)$

Trafo $z = y - y^*(t)$

$z' = y' - y^{*\prime} =$
$= f(y,t) - f(y^*,t) =$
$= f(z+y^*,t) - f(y^*,t)$
$= \boxed{F(z,t)}$, $z^* = 0$

Linear: $\forall U \exists V$



(A)
$y' = A(t)y$, $y(t_0) = y_0$

$\boxed{y(t) = Y(t)\,Y^{-1}(t_0)\,y_0}$

$Y(t)$ besch $\Rightarrow$ stabil

$Y(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0 \Rightarrow$ a.S.

(B)
$y' = Ay$

$\left.\begin{array}{l} Re(\lambda_j) \le 0 \\ a(\lambda_j) = g(\lambda_j) \end{array}\right\} \Rightarrow$ st.

$Re(\lambda_j) < 0 \Rightarrow$ a.S.

$\exists \lambda_j$ $Re\,\lambda_j > 0 \Rightarrow$ insl

Dez 14-14:19

$$\left.\begin{array}{l} \dot x = y \\ \dot y = x - x^3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}$$

stat. Pkt $(0,0), (1,0)$

bei $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{Jf(0)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

bei $(1,0)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-3x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Jf(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Dez 14-14:45

Satz: (Stabilitätssatz III)

Unter den obigen Voraussetzungen gelten:

1) Ist für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A} = \mathbf{J}\,\mathbf{f}(0)$: $A = Jf(0)$

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0, \qquad Re(\lambda_j) < 0$$

so ist $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ ein strikt stabiler Gleichgewichtspunkt von $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y})$, d.h. die Stabilität des linearisierten Systems überträgt sich auf das nichtlineare System.

2) Existiert ein Eigenwert λ_j von $\mathbf{A}$ mit:

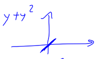
$$\mathrm{Re}(\lambda_j) > 0, \qquad Re(\lambda_j) > 0$$

so ist der Gleichgewichtspunkt $\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$ instabil, d.h. die Instabilität des linearisierten Problems überträgt sich ebenfalls aus das nichtlineare Problem.

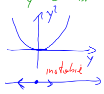
ad 1 Bspl $\dot y = y + y^2$ — $y=0$ instabil
Lin (um 0) $\dot y = y$ $\lambda_1 = 1$ — $Re\,\lambda_1 > 0 \Rightarrow$ instabil

Bspl $\dot y = -y + y^2$ — $y=0$ asy stabil
Lin (um 0) $\dot y = -y$ $\lambda_1 = -1$ — $Re\,\lambda_1 < 0 \Rightarrow$ asy. st.

$f(y) = y + y^2$



Bspl $\dot y = y^2$ — $y=0$ asy. stabil $\Rightarrow$ stabil
$\dot y = 0$ $\lambda_1 = 0$



Bspl $\dot y = -y^2$ asy stabil
$\dot y = 0 \Rightarrow ?$

Dez 14-14:52

Bemerkung:

Die Stabilitätsuntersuchung eines nichtlinearen Systems mittels Linearisierung funktioniert **nicht**, falls

1) für alle Eigenwerte λ_j von $\mathbf{A}$ gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) \le 0, \qquad Re(\lambda_j) \le 0$$

2) **und** für mindestens ein Eigenwert λ_j gilt:

$$\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0, \qquad Re(\lambda_j) = 0$$

Beispiel:

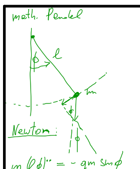
Das mathematische Pendel wird beschrieben durch die nichtlineare DGL

$$\ddot\Phi = -\frac{g}{l}\sin\Phi = -\omega^2 \sin\Phi$$

Dabei ist

Dez 14-15:02

math. Pendel



Newton:

$m(l\phi)'' = -gm\sin\phi$

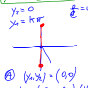
$\boxed{\phi'' = -\frac{g}{l}\sin\phi}$

kleine Auslenkung
$\sin\phi \approx \phi$
$\phi'' = -\omega^2\phi$

$\phi = y_1$
$\dot\phi = y_2$

$\boxed{\begin{array}{l} \dot y_1 = y_2 \\ \dot y_2 = -\frac{g}{l}\sin y_1 \end{array}}$

$y_2 = 0$, $y_1 = k\pi$ $\quad \frac{g}{l} = \omega^2$



(A) $(y_1,y_2) = (0,0)$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$
$\lambda^2 = -\omega^2$
$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$
$Re\,\lambda_{1,2} = 0$

(B) $(y_1,y_2) = (\pi,0)$

$\sin y_1 = \sin(y_1 - \pi + \pi)$
$= \sin(y_1-\pi)\cos\pi + \cos(y_1-\pi)\cancel{\sin\pi}$
$= -\sin(y_1-\pi)$
$= -(y_1-\pi) + O((y_1-\pi)^2)$

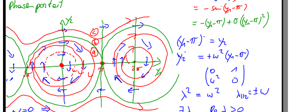
$(y_1-\pi)' = y_2$
$y_2' = +\omega^2(y_1-\pi)$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda^2 = \omega^2$ $\lambda_{1,2} = \pm\omega$

$\exists\lambda_1$ $Re\,\lambda_1 > 0$ $\Rightarrow$ instabil

Phasenportrait



$y_2 = 0 \Rightarrow$
$y_1 = 0$

$\boxed{\ddot\phi = -\omega^2\sin\phi}$ $\dot\phi$

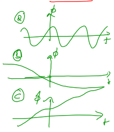
$\ddot\phi\dot\phi = -\omega^2\sin\phi\,\dot\phi$

$\left(\frac{\dot\phi^2}{2}\right)' = +\omega^2(\cos\phi)'$

$\frac{\dot\phi^2}{2} - \omega^2\cos\phi = \text{const}$

z.B. $\frac{\dot\phi^2}{2} = \omega^2(1-\cos\phi)$

$\Rightarrow$



Dez 14-15:02

Ljapunov:

$\dot y = -y^3$

$V(y) = \frac{y^2}{2}$ $\quad \nabla V = y$

$V(0) = 0$

Lin (um 0)
$\dot y = 0$
keine Aussage

Dez 14-15:31