Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(\alpha x + \beta y(x) + \gamma)$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Substitution

$$u(x) := \alpha x + \beta y(x) + \gamma$$

auf eine separierbare Differentialgleichung transformiert werden kann.

b) (Klausur 2008) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = \exp(x - 2y) + 0.5, \qquad y(0) = 0\,.$$

c) Überprüfen Sie Ihre Lösung aus Teil b) durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Aufgabe 2: *Trennung der Variablen/Lineare DGL'n:*

a) Ermitteln Sie die allgemeinen Lösungen der folgenden Differentialgleichungen erster Ordnung.

$$\text{i)}\quad 2xy^2 = (1-x^2)\,y', \qquad \text{ii)}\quad x\,y' = -\,y\ln y,$$

$$\text{iii)}\quad y' - 4t\,y = 8t^3, \qquad \text{iv)}\quad y' - y = \cos t\,.$$

b) In einem einfachen Gleichstromkreis mit Spule gelte zum Zeitpunkt des Einschaltens $I(0) = 0$. Dann erhält man mit den üblichen Bezeichnungen ($U =$ Spannung, $I =$ Stromstärke, $L =$ Induktivität der Spule) die folgende Anfangswertaufgabe für den zeitlichen Verlauf des Einschaltstroms:

$$U = I(t) \cdot R + L \cdot \dot{I}(t)\,, \qquad I(0) = 0\,.$$

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 3: Folgende Gleichungen modellieren die eindimensionale Bewegung eines Massepunktes unter verschiedenen Voraussetzungen. Dabei bezeichnet $v(t)$ die Geschwindigkeit des Teilchens zum Zeitpunkt t. Lösen Sie die gegebenen Differentialgleichungen.

a) Beschleunigung durch eine konstante Kraft (Gleichmäßige Beschleunigung):

$\dot{v}(t) = a\,, \forall t > t_0, \qquad v(t_0) = v_0\,,\; a \in \mathbb{R}^+$ konstant.

b) Beschleunigung durch eine konstante Kraft sowie eine der Geschwindigkeit entgegen wirkende Reibungskraft, die betragsmäßig proportional zur Geschwindigkeit wächst:

$\dot{v}(t) = a - bv(t), \forall t > t_0, \qquad v(t_0) = v_0\,,\; a, b \in \mathbb{R}^+$ konstant.

c) Beschleunigung durch eine konstante Kraft sowie eine der Geschwindigkeit entgegen wirkende Reibungskraft, die betragsmäßig quadratisch mit der Geschwindigkeit wächst:

$\dot{v}(t) = a - bv^2(t), \forall t > t_0, \qquad v(t_0) = v_0\,,\; a, b \in \mathbb{R}^+$ konstant.

Hinweis: Die letzte Differentialgleichung kann als Riccatische oder als separierbare Differentialgleichung gelöst werden. Eine spezielle Lösung erhalten Sie, wenn Sie die Geschwindigkeit berechnen, für die die Beschleunigung Null wird.

Aufgabe 4:

Die Geschwindigkeit, mit der ein fester Stoff S in einem Lösungsmittel aufgelöst wird, ist proportional zu der noch unaufgelösten Menge von S und zu der Differenz zwischen Sättigungskonzentration und momentaner Konzentration des schon aufgelösten Stoffes. Es seien

$V :=$ Volumen, $\qquad K :=$ Sättigungskonzentration,

$K_0 :=$ Anfangskonzentration, $\qquad S(t) :=$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt t,

$S_0 := S(0) =$ unaufgelöste Menge des Stoffes S zum Zeitpunkt Null (Anfangswert),

$K_0 + \dfrac{S_0 - S(t)}{V} :=$ Konzentration des Stoffes S zum Zeitpunkt t,

$\gamma :=$ Proportionalitätskonstante.

a) Beschreiben Sie den Auflösungsprozess durch eine Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe mit den Daten

$S_0 = 10$ kg, $V = 100$ lit, $K = 0.25\,\text{kg/lit}$, $K_0 = 0\,\text{kg/lit}$, $\gamma = 4\,\text{lit}/(\text{kg}\cdot\text{sek.})$.

indem Sie die Differentialgleichung

(i) als Bernoullische Differentialgleichung behandeln,

(ii) direkt, als separierbare Differentialgleichung lösen.

c) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe des Matlab–Befehls ode45 numerisch. Informieren Sie sich mit Hilfe des Befehls

```
>> help ode45
```

Vergleichen Sie graphisch Ihre exakte Lösung mit der von Matlab gelieferten Lösung.

Abgabetermine: 01.11.-05.11.2010