Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2

Aufgabe 1: Bitte lösen Sie die angegebenen Aufgaben, und tragen Sie Ihre Antworten in die dafür vorgegebenen Kästchen ein.

Gegeben sind die Differentialgleichungen:

a) $ty^2(t+y)(2t+y) + t^2y(t+y)(t+2y)y' = 0\,,$

b) $2t(y^2 - t^2 - 1) + 2yy' = 0\,,$

c) $\dfrac{1}{ty^2} + \dfrac{1 - 2(\ln t + \ln y)}{y^3}y' = 0\,,$

d) $y\left(\sqrt{t^2+y^2} + y'\right) + t\left(1 + y'\,\sqrt{t^2+y^2}\right) = 0\,,$

e) $y + y' = 0\,.$

i) Welche der Differentialgleichungen a) bis e) ist/sind exakt?

ii) Welche der nicht exakten Differentialgleichungen aus a) bis e) besitzt/besitzen einen integrierenden Faktor der Form $m(t)$.

iii) Welche der nicht exakten Differentialgleichungen aus a) bis e) besitzt/besitzen einen integrierenden Faktor der Form $m(y)$.

Aufgabe 2: [Punkteverteilung wie in der Klausur 2005/Prof. Oberle] Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe eines integrierenden Faktors

$$2t^2 + 2ty^2 + 1 + 2yy' = 0.$$

Hinweis: Das gesuchte Potential hat die Gestalt $\Phi(t, y) = (p(t) + q(y))\, e^{t^2}$, p, q Polynome.

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x + y\sqrt{x^2 + y^2} + \left(y + x\sqrt{x^2 + y^2}\right) y' = 0.$$

a) Leiten Sie eine implizite Darstellung $\Phi(x, y) = K$ der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung her.

b) Plotten Sie die Lösungen für verschiedene Werte von K im Bereich $x, y \in [-3, 3]$ mit Hilfe des Matlab Befehls *contour*.

c) Bestimmen Sie K für die zugehörige Anfangswertaufgabe mit $y(0) = 0.8$. Plotten Sie die Lösung, und berechnen Sie einen Näherungwert für $y(0.25)$ mit *ode45*.

d) Sei nun $y(0) = 0.2$. Versuchen Sie die Aufgabe näherungsweise mit *ode45* für $x \in [0, 0.25]$ zu lösen. Plotten Sie die Näherungslösung von Matlab. Was geht da schief?

   Probieren Sie es mit *ode15s* und achten Sie auf die Fehlermeldung. Können Sie jetzt erklären, warum die Programme nicht zum Ziel führen?

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie analytisch eine Lösung $y : [0, 1[\to \mathbb{R}$ der Anfangswertaufgabe

$$y''(t) = y'(t)\,(y(t) + 1), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2\,\cdot$$

b) Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösung $u = u(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der folgenden Poissongleichung im $\mathbb{R}^2$

$$\Delta\, u = 1$$

c) Bestimmen Sie die stationäre und radialsymmetrische Temperaturverteilung in einer homogenen Kreisscheibe mit Innenradius $r_i = 1$, Außenradius $r_a = 2$, Innentemperatur $T_i = 20$ und Außentemperatur $T_a = 15$.

Abgabetermine: 15.11.-19.11.2010