Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4

Aufgabe 1:

a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} + \begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x \geq 0.5$$

Nach Aufgabe 4, Blatt 3 ist durch

$$Y(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x} & x^3 \\ \frac{1}{x^2} & 3x^2 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Aufgabe gegeben.

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe.

(ii) Berechnen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit den Anfangswerten $\boldsymbol{y}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Das lineare Differentialgleichungssystem $\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$ hat das komplexe Fundamentalsystem

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{(-1+2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}, \qquad v(t) = e^{(-1-2i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist zum Beispiel gegeben durch:

☐ $\boldsymbol{y}_{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_{[2]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 2\cos(2t) \end{pmatrix}.$

☐ $\boldsymbol{y}_{[1]}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_{[2]}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

☐ $\boldsymbol{y}_{[1]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 4\sin(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_{[2]}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -4\sin(t) \end{pmatrix}.$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung des Differentialgleichungssystem

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} - e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: [8+2 Punkte]

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des linearen Differentialgleichungssystems

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y} .$$

b) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit $\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4:

a) (i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' = 4y - 6y' + 4y'' .$$

(ii) Bestimmen Sie die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe mit

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 3, \; y''(0) = 8 .$$

(iii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 2e^{2t}.$$

Hinweis: Spezieller Ansatz.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y''(t) + 4y(t) = \frac{2}{\sin(2t)} .$$

Hinweis: Variation der Konstanten.

Abgabetermine: 13.12.-17.12.2010