Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **WiSe 2010/11**
Prof. Dr. H. J. Oberle
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} {y_1}'(t) &= y_1(t) - y_2(t) + t \\ {y_2}'(t) &= 4y_1(t) - 3y_2(t) + 4 \\ d_1 &= 2y_1(0) - \exp(1)y_1(1) \\ d_2 &= y_2(0) + \alpha \exp(1) y_2(1) \qquad \alpha, d_1, d_2 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Formulieren Sie die Aufgabe in Matrixschreibweise.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems.

c) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems mit Hilfe des Ansatzes

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix} \qquad a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}.$$

d) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $d_1,\, d_2 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar?

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$\begin{gathered} x^2y'' - x\,y' + y = h(x) \qquad x \in]1,3[\\ y(1) + \alpha y'(1) = \gamma_1 \\ y(3) - 3y'(3) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1,\, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,. \end{gathered}$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2y'' - x\,y' + y = 0 \qquad x \in]1,3[$$

indem Sie zunächst eine Lösung mit Hilfe des Ansatzes $y^{[1]}(x) = x^k$ ermitteln. Bestimmen Sie dann eine zweite Lösung mit Hilfe des Reduktionsansatzes $y^{[2]}(x) = y^{[1]}(x) \cdot w(x)\,.$

b) Berechnen Sie die Wronski-Determinante des äquivalenten Systems für $x = 1$.

c) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1, 3]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

d) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe für $h(x) = x^2$ mit Hilfe der Variation der Konstanten.

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Hamilton-Funktion eine C^1–Funktion $y_0 \in C^1[1, 9]$ mit $y_0(1) = y_0(9) = 3$, die das Funktional

$$I[y] := \int_1^9 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} \, dt$$

minimiert und berechnen Sie den minimalen Wert des Zielfunktionals.

b) Welche Lösung erhält man, wenn die Randbedingung $y_0(9) = 3$ weggelassen wird? Wie lautet nun der minimale Wert des Zielfunktionals?

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Variationsaufgabe

Minimiere $I[y] = \int_0^2 (y'(t))^2 - 4(y(t) + t)y'(t) + 9y(t)^2 \, dt$

unter der Nebenbedingung $y(2) = 1$.

a) Stellen Sie die Euler–Lagrange Gleichung des Variationsproblems auf und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Bestimmen Sie die Lösung y_0 der in a) erhaltenen Randwertaufgabe.

c) Zeigen Sie durch direkte Auswertung von $I[y_0 + \epsilon z]$ mit einer Funktion $z \in C^1[0, 2]$, die die homogenen Randbedingungen der Aufgabe aus b) erfüllt, dass y_0 tatsächlich das Funktional I (lokal) minimiert.

Abgabetermine: 24-28.01.2011