Aufgabe 1)

a) Gegeben ist die Randwertaufgabe

$$x^2 y'' - 3x\,y' + 3y = h(x) \qquad x \in\,]1,2[$$

$$y(1) + y'(1) = \gamma_1$$
$$y(2) + \alpha y'(2) = \gamma_2 \qquad \alpha, \gamma_1,\, \gamma_2 \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3x\,y' + 3y = 0 \qquad x \in\,]1,2[$$

mit Hilfe des Ansatzes $y(x) = x^k$.

(ii) Für welche Werte von α ist die Randwertaufgabe für beliebige $\gamma_1,\, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ und beliebige auf dem Intervall $[1,2]$ stetige Funktionen $h(x)$ eindeutig lösbar?

b) Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung

$$y'(x) = \cos(x)\, y(x) + x\, e^{\sin(x)}$$

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mittels Variation der Konstanten.

Lösung zur Aufgabe 1

a) (i) [**2 Punkte**] Einsetzen des Ansatzes in die Dgl. ergibt

$$x^k(\, k(k-1) - 3k + 3) = 0 \iff k = 1 \,\vee\, k = 3$$

Die Funktionen

$$y_1(x) = x\,, \qquad y_2(x) = x^3$$

sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.
Die beiden Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

(ii) [**4 Punkte**]

$$R_1(y_1) = y_1(1) + {y_1}'(1) = 2\,,$$
$$R_1(y_2) = y_2(1) + {y_2}'(1) = 4\,,$$
$$R_2(y_1) = y_1(2) + \alpha {y_1}'(2) = 2 + \alpha\,,$$
$$R_2(y_2) = y_2(2) + \alpha {y_2}'(2) = 8 + 12\alpha\,.$$

Die RWA ist genau dann für alle $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, h(x)$ eindeutig lösbar, wenn die Martrix

$$\mathbf{R} := \begin{pmatrix} R_1(y_1) & R_1(y_2) \\ R_2(y_1) & R_2(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2+\alpha & 8+12\alpha \end{pmatrix}$$

regulär ist. Also genau dann, wenn

$$\det R = 8 + 20\alpha \neq 0 \iff \alpha \neq -\frac{2}{5}.$$

b) (i) [**2 Punkte**]
Homogene Differentialgleichung:

$$\frac{dy_h}{dx} = \cos(x)\, y_h \iff \int \frac{dy_h}{y_h} = \int \cos(x) dx$$

Wir erhalten also

$$\ln|y_h| = \sin(x) + k \iff y_h(x) = c \cdot e^{\sin(x)} \qquad c \in \mathbb{R}.$$

(ii) [**2 Punkte**] Variation der Konstanten liefert

$$c'(x) e^{\sin(x)} = x\, e^{\sin(x)} \iff c'(x) = x$$

Man kann also $c(x) = \frac{x^2}{2}$ wählen und erhält $y_p(x) = \frac{x^2}{2} \cdot e^{\sin(x)}$
Die allgemeine Lösung der inhomogenen Aufgabe ist
$y_(x) = c \cdot e^{\sin(x)} + \frac{x^2}{2} \cdot e^{\sin(x)}$

Aufgabe 2: Gegeben ist das Variationsproblem: Minimiere das Funktional

$$I[y] := \int_0^2 e^{-2t}\left((y')^2 - y^2\right) + 6ty'\,dt$$

unter allen C^1-Funktionen $y = y(t)$ mit $y(0) = -1$.

a) Stellen Sie die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf, und geben Sie die natürliche Randbedingung an.

b) Lösen Sie die sich aus Teil a) ergebende Randwertaufgabe.

Lösungsskizze:

a) Sei $f(t, y, y') := e^{-2t}(y'^2 - y^2) + 6ty'$, dann lautet die Euler-Lagrange-Gleichung [**2 Punkte**]

$$\begin{aligned} f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} &= -2ye^{-2t} - \frac{d}{dt}\left[2y'e^{-2t} + 6t\right] \\ &= -2ye^{-2t} - 2y''e^{-2t} + 4y'e^{-2t} - 6 \overset{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Neben der gegebenen Randbedingung $y(0) = -1$ ist die natürliche Randbedingung [**1 Punkt**]

$$f_{y'}(2, y(2), y'(2)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2y'(2)e^{-4} + 12 = 0$$

zu erfüllen. Damit erhalten wir das folgende inhomogene Randwertproblem

$$\begin{aligned} &y'' - 2y' + y = -3e^{2t}, \\ &y(0) = -1, \quad y'(2) = -6e^4. \end{aligned}$$

b) Wir bilden das charakteristische Polynom der homogene DGL:

$$\begin{aligned} &y'' - 2y' + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1} = 1. \ \text{[\textbf{1 Punkt}]} \end{aligned}$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet daher

$$y_h = \alpha e^t + \beta t e^t. \ \text{[\textbf{1 Punkt}]}$$

Als speziellen Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir

$$y_p = \gamma e^{2t} \quad \Longrightarrow \quad y_p' = 2\gamma e^{2t}, \quad y_p'' = 4\gamma e^{2t}. \ \text{[\textbf{1 Punkt}]}$$

Einsetzen in die DGL liefert die Bedingung

$$4\gamma - 2 \cdot 2\gamma + \gamma = -3 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = -3. \text{ [\textbf{1 Punkt}]}$$

Damit gilt

$$y(t) = \alpha e^t + \beta t e^t - 3e^{2t}$$

sowie

$$y'(t) = \alpha e^t + \beta(t+1)e^t - 6e^{2t}.$$

Die Randbedingung $y(0) = -1$ liefert $\alpha = 2$, [**1 Punkt**]
die natürliche Randbedingung führt zu

$$y'(2) = 2e^2 + 3\beta e^2 - 6e^4 \stackrel{!}{=} -6e^4 \quad \Longrightarrow \quad \beta = -\frac{2}{3}, \text{ [\textbf{1 Punkt}]}$$

also insgesamt

$$y(t) = 2e^t - \frac{2}{3} t e^t - 3e^{2t}. \text{ [\textbf{1 Punkt}]}$$