

## Differentialgleichungen I für Studierende der Ingenieurwissenschaften

### Blatt 6

#### Aufgabe 21:

Für die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq \pi$$

bestimme man alle Lösungen für folgende Randbedingungen:

- a)  $y(0) = 0$  und  $y'(\pi) = 1$ ,
- b)  $y(0) + 2y(\pi) = 0$  und  $3y(0) + 4y(\pi) = 0$ ,
- c)  $y'(0) + y'(\pi) = 0$  und  $y'(0) - y'(\pi) = 1$ .

#### Aufgabe 22:

Gegeben sei das Randwertproblem

$$\begin{array}{ll} \dot{y}_1 = 3y_1 + y_3, & y_1(0) + y_1(1) = 1, \\ \dot{y}_2 = 2y_1 + 5y_2 + 2y_3, & y_2(0) + \mu y_2(1) = 0, \\ \dot{y}_3 = y_1 + 3y_3, & y_3(0) + y_3(1) = -1. \end{array}$$

- a) Man gebe die Aufgabe in Matrixschreibweise an.
- b) Man berechne die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- c) Für welche  $\mu \in \mathbb{R}$  ist die Randwertaufgabe eindeutig lösbar?
- d) Ist die Randwertaufgabe für ein  $\mu \in \mathbb{R}$  nicht eindeutig lösbar, so gebe man alle Lösungen an.

**Aufgabe 23:**

Gegeben ist die Minimierungsaufgabe: Minimiere das Funktional

$$I[y] = \int_0^1 y^2 + (y')^2 - yy' dt$$

für alle  $C^1$ -Funktionen  $y$  mit  $y(0) = 1$ .

- a) Man stelle die zugehörige Euler-Lagrange-Gleichung auf,
- b) bestimme die natürliche Randbedingung und
- c) löse die zugehörige Randwertaufgabe.

**Aufgabe 24:**

Man berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen der folgenden Randeigenwertaufgabe

$$-y'' + 2y = \lambda y \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \quad \text{und} \quad y(1) = 0.$$

**Abgabetermin:** 23.01. - 27.01. (zu Beginn der Übung)